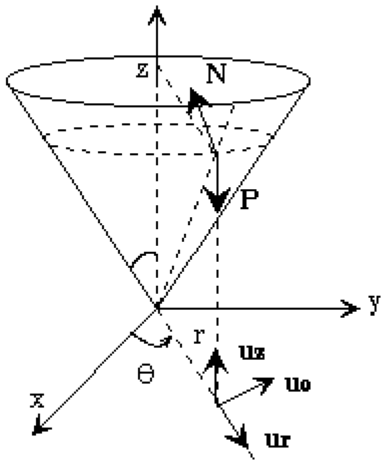
M3.16. Point mobile à l'intérieur d'un cône.

Soit *C* un cône de sommet *O*, d'axe de révolution *Oz*, confondu avec la verticale ascendante et de demi angle au sommet α. Dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z), *C* est décrit par l'équation : $r = z \tan\alpha$.



Un point matériel *M* de masse *m* repose sans frottement sur la surface interne de *C*, il est donc soumis à son poids $\vec{P} = -mg\vec{u_z}$ et à une action de contact normale à *C* :

$$\vec{N} = -N\cos\alpha\,\vec{u_r} + N\sin\alpha\,\vec{u_z} \qquad \text{avec } N > 0$$

M est initialement lancé du point *C* de coordonnées cylindriques $r_o = a$, $\theta_o = 0$, $z_o = \dfrac{a}{\tan\alpha}$ et avec une vitesse v_o horizontale et tangente à *C* ($\dot{r}_o = 0, \dot{\theta}_o = \omega, \dot{z}_o = 0$).

On pose : $\omega_o^2 = \dfrac{g}{a}$ et $\omega = \lambda\,\omega_o$.

1. Exprimer la loi de la dynamique en coordonnées cylindriques. En déduire que, pour une valeur particulière λ_o de λ que l'on exprimera en fonction de α, le mouvement de *C* peut-être circulaire et uniforme.

Le mouvement du point *M* est maintenant quelconque.

2. Etablir que $r^2\dot{\theta} = Cte$. Déterminer l'expression de *Cte*. Interpréter.
3. En exprimant la conservation de l'énergie mécanique de *M*, établir une équation différentielle ne contenant que *r* et sa dérivée par rapport au temps. On notera Ep_{eff} la partie de l'énergie mécanique ne dépendant que de *r*. Par une méthode graphique portant sur Ep_{eff}, déduire de cette équation que *r* reste toujours compris entre deux limites r_1 et r_2.
4. Montrer que deux allures différentes d'évolution de *r* se présentent selon que λ est inférieur ou supérieur à λ_o.