M3.16. Point mobile à l'intérieur d'un cône.

1. Cas d'un mouvement circulaire et uniforme.

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, la loi de la dynamique appliquée au point M s'écrit :

$$\vec{P}+\vec{N}=m\vec{a}$$

La projection de cette expression dans la base cylindro-polaire s'écrit :

(1) suivant $\vec{u}_r$: $m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)=-N\cos\alpha$

(2) suivant $\vec{u}_\theta$: $m\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right)=m\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)=0$

(3) suivant $\vec{u}_z$: $m\ddot{z}=N\sin\alpha-mg$

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme on a :

$$r=cte\Rightarrow\dot{r}=0 \text{ et } \ddot{r}=0$$
$$\dot{\theta}=cte\Rightarrow\ddot{\theta}=0$$
$$z=cte\Rightarrow\dot{z}=0 \text{ et } \ddot{z}=0$$

Les équations précédentes s'écrivent maintenant :

$$(1'): mr\omega^2=N\cos\alpha \;\Rightarrow\; N=\frac{mr\omega^2}{\cos\alpha}$$

$$(2'): r^2\dot{\theta}=Cte$$

$$(3'): N\sin\alpha-mg=0 \;\Rightarrow\; N=\frac{mg}{\sin\alpha}$$

Le rapport des équations (3') et (1') donne :

$$\frac{mg}{\sin\alpha}\frac{\cos\alpha}{mr\omega^2}=1 \text{ comme } r=a \text{ on obtient :}$$

$$\tan\alpha=\frac{g}{a\omega^2}=\frac{\omega_o^2}{\omega^2}=\frac{1}{\lambda_o^2}$$

$$\lambda_o=\frac{1}{\sqrt{\tan\alpha}}$$

2. Expression de la constante.

D'après l'équation (2') : $r^2\dot{\theta}=Cte$

On détermine l'expression de la constante en utilisant les conditions initiales :

$$r\left(t=0\right)^2\dot{\theta}\left(t=0\right)=a^2\omega=a^2\lambda\omega_o=Cte$$

On reconnait ici la loi des aires : en effet dans le plan $\left(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta\right)$ le mouvement est à force centrale $-N\cos\alpha\vec{u}_r$.

3. Equation différentielle.

On exprime l'énergie mécanique de la particule :

$$E_m=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2\right)+mgz=\text{constante}$$

Or : $z=\dfrac{r}{\tan\alpha}$; $r^2\dot{\theta}=a^2\lambda\omega_o \Rightarrow \dot{\theta}^2=\left(\dfrac{a^2\lambda\omega_o}{r^2}\right)^2$ et $\lambda_o=\dfrac{1}{\sqrt{\tan\alpha}}$

Ces relations permettent d'éliminer de l'intégrale première de l'énergie la dépendance en z et $\dot{\theta}$:

$$E_m=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\left(\frac{a^2\lambda\omega_o}{r^2}\right)^2+\frac{\dot{r}^2}{\tan^2\alpha}\right)+\frac{mgr}{\tan\alpha}=\text{constante}$$

$$E_m=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\left(1+\lambda_o^4\right)+\frac{1}{r^2}a^4\lambda^2\omega_o^2\right)+\frac{mgr}{\tan\alpha}=\text{constante}$$

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2\left(1+\lambda_o^4\right)+\frac{1}{2r^2}a^4\lambda^2\omega_o^2+gr\lambda_o^2=\frac{\text{constante}}{m}$$

Comme $g=a\omega_o^2$, on obtient :

$$\underbrace{\frac{1}{2}\dot{r}^2\left(1+\lambda_o^4\right)}_{\text{Energie cinétique suivant } r}+\underbrace{a^2\omega_o^2\left(\frac{1}{2}\frac{a^2\lambda^2}{r^2}+\lambda_o^2\frac{r}{a}\right)}_{\text{Energie potentielle dite effective } E_{p\,eff}}=Cte'$$

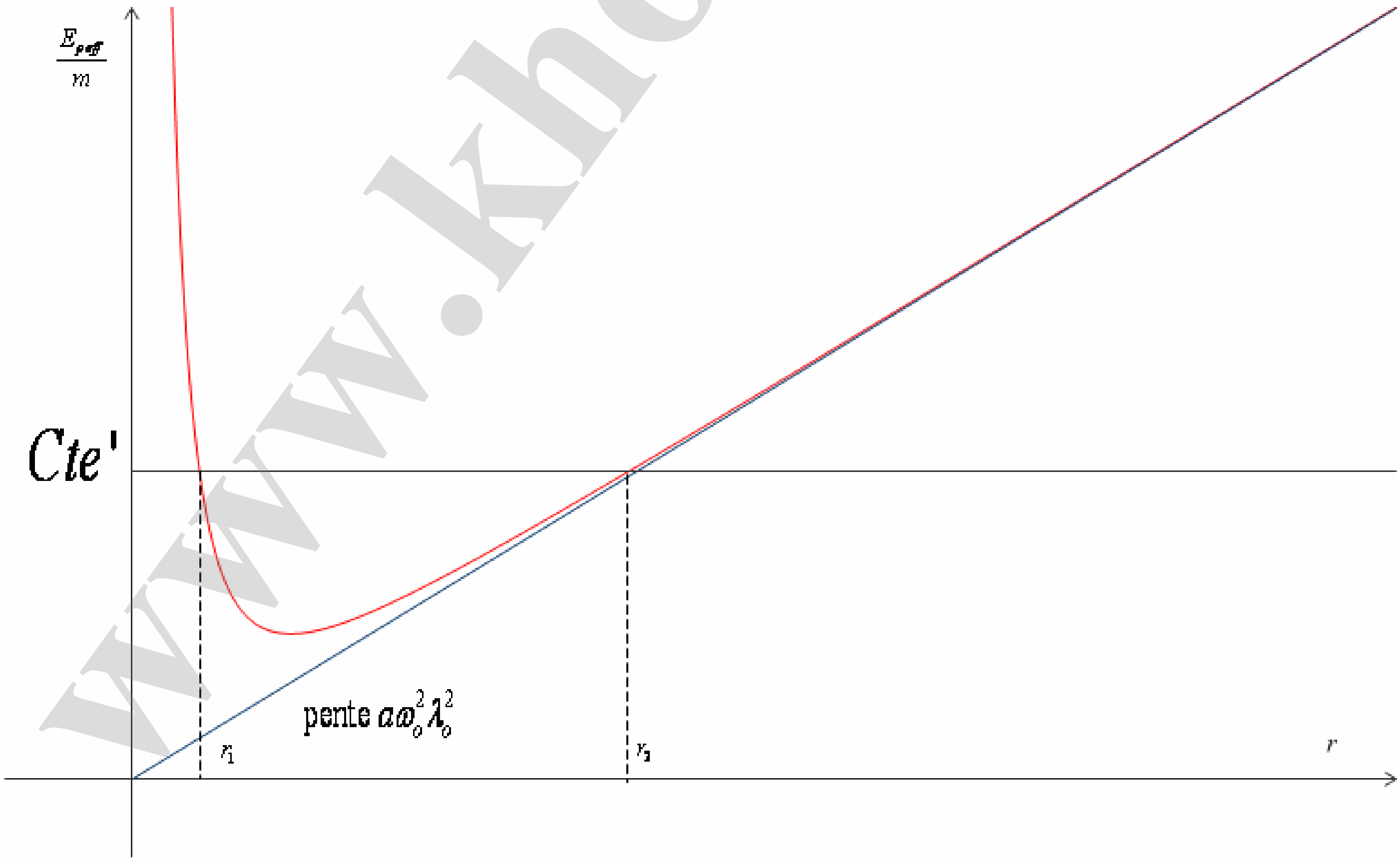
$$E_{p\,eff}=a^2\omega_o^2\left(\frac{1}{2}\frac{a^2\lambda^2}{r^2}+\lambda_o^2\frac{r}{a}\right)$$

$$r\to\infty \quad E_{p\,eff}=a^2\omega_o^2\lambda_o^2\frac{r}{a}=a\omega_o^2\lambda_o^2 r$$

$$r\to 0 \quad E_{p\,eff}\to\infty$$

On recherche les extremums de la fonction $E_{p\,eff}$:

$$\frac{dE_{p\,eff}}{dr}=a^2\omega_o^2\left(-\frac{1}{2}a^2\lambda^2\frac{2}{r^3}+\frac{\lambda_o^2}{a}\right)=0 \Rightarrow r=\left(\frac{\lambda}{\lambda_o}\right)^{2/3}$$



On peut déduire de cette étude graphique que : $r_1 \le r \le r_2$.

4. Evolution de *r*.

Comme à t = 0, $\dot{r}(0) = 0$ pour $r = a$, l'une des deux positions limites r_1 ou r_2 doit être égale à a.

D'autre part comme la position d'équilibre $r = a\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_o}\right)^{2/3}$ est nécessairement comprise entre r_1 et r_2, on peut en déduire que si :

$$\lambda > \lambda_o \Rightarrow r_1 = a \text{ et } r_2 > a$$
$$\lambda < \lambda_o \Rightarrow r_2 = a \text{ et } r_1 < a$$