**M3.14. Mouvement d'une particule soumise à une force de puissance constante.**

**1. Expression de *x* en fonction de *v*.**

On étudie la masse $m$ dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Ce système est soumis à son poids, à la réaction du support, à la force de puissance constante et à la force de frottement.

La relation de la dynamique s'écrit :

$$\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}+\vec{f}=m\vec{a}$$

La projection de cette équation l'axe $Ox$ donne :

$$F_x-\beta mv^2=m\ddot{x}\ \ (1)$$

Pour avoir un mouvement horizontal dans le sens des $x$ croissants, il faut avoir $F_x=F>0$. D'autre part la puissance d'une force est définie par :

$$P=\vec{F}.\vec{v}\ \text{ qui s'écrit dans notre cas }\ P=Fv\Rightarrow F=\frac{P}{v}$$

L'équation a alors pour expression :

$$\frac{P}{v}-\beta mv^2=m\frac{dv}{dt}=m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=m\frac{dv}{dx}v$$
$$\frac{dv}{dx}=\frac{P}{mv^2}-\beta v=\frac{P-m\beta v^3}{mv^2}$$
$$dx=\frac{mv^2dv}{P-m\beta v^3}$$

On pose $u=P-m\beta v^3$ d'où :

$$du=-m\beta 3v^2dv\Rightarrow -mv^2dv=\frac{1}{3\beta}du$$

$$dx=-\frac{1}{3\beta}\frac{du}{u}=-\frac{1}{3\beta}d\ln u$$
$$x=-\frac{1}{3\beta}\ln\left|P-3\beta v^3\right|+Cste$$

Comme à $t=0$, $v=0$ et $x=0$ il vient :

$$0 = -\frac{1}{3\beta}\ln P + Cste \Rightarrow Cste = \frac{1}{3\beta}\ln P$$

$$x = \frac{1}{3\beta}\ln\left|\frac{P}{P-\beta m v^3}\right| = -\frac{1}{3\beta}\ln\left(1-\frac{\beta m v^3}{P}\right)$$

$$\text{Quand } x \to \infty, 1-\frac{\beta m v^3}{P} \to 0$$

$$v \to v_{\lim} = \left(\frac{P}{\beta m}\right)^{\frac{1}{3}}$$

On peut finalement écrire $x$ sous la forme :

$$x = -\frac{1}{3\beta}\ln\left(1-\frac{v^3}{v_{\lim}^3}\right)$$

**2. Etude d’un cas particulier.**

Si $\beta \to 0$ on a $\ln\left(1-\frac{\beta m v^3}{P}\right) \approx -\frac{\beta m v^3}{P}$, $x$ peut alors s’exprimer sous la forme :

$$x \approx -\frac{1}{3\beta}\left(\frac{-\beta m v^3}{P}\right)$$

$$x = \frac{m v^3}{3P}$$

**3. Applications numériques.**

On a : $v_{\lim} = \left(\frac{P}{\beta m}\right)^{\frac{1}{3}}$ d'où $\beta = \frac{P}{m v_{\lim}^3}$ $\qquad \beta = 1,0.10^{-3}$ S.I

Pour $v = v_{\lim}/2$, $x$ a pour expression :

$$x = -\frac{1}{3\beta}\ln\frac{7}{8} = -\frac{1}{3}\frac{m v_{\lim}^3}{P}\ln\frac{7}{8}$$

$$x = 42,7 \text{ m}$$