M3.13. Mouvement d'une particule dans un champ de force dérivant de l'énergie potentielle *Ep=kxy*.

1. Unité de *k*.

Soit u_k l'unité de *k*.

$$u_k = \frac{u_{Ep}}{u_{xy}} = \frac{\text{J}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg.m}^2\text{.s}^{-2}}{\text{m}^2}$$

$$u_k = \text{kg.s}^{-2}$$

2. Expression de la force.

La force $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle *Ep*. Son expression en fonction de cette énergie s'écrit :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}Ep = -\frac{\partial Ep}{\partial x}\vec{u}_x - \frac{\partial Ep}{\partial y}\vec{u}_y - \frac{\partial Ep}{\partial z}\vec{u}_z$$

$$\vec{F} = -ky\vec{u}_x - kx\vec{u}_y$$

3. Travail de la force.

On peut appliquer la définition de l'énergie potentielle pour déterminer l'expression du travail :

$$\Delta Ep_{O\to A} = Ep(A) - Ep(O) = -W_{O\to A}^{\vec{F}}$$

$$W_{O\to A}^{\vec{F}} = -Ep(A) = -kx_A y_A$$

$$W_{O\to A}^{\vec{F}} = -5,0\ \text{J}$$

Le travail de la force est résistant.

On peut aussi effectuer un calcul direct du travail :

$$W_{O\to A}^{\vec{F}} = \int_O^A \delta W = \int_O^A \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = \int_O^A \left(-ky\vec{u}_x - kx\vec{u}_y\right).\left(dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y\right)$$

$$W_{O\to A}^{\vec{F}} = -k\int_O^A (ydx + xdy) = -k\int_O^A d(xy)$$

$$W_{O\to A}^{\vec{F}} = -k[xy]_O^A = -kx_A y_A$$

4.a. Conservation de l'énergie mécanique.

L'énergie mécanique s'écrit :

$$E_m = E_c + E_P$$

L'expression de la différentielle de l'énergie mécanique s'écrit :

$$dE_m = dE_c + dE_P$$

L'application du théorème de l'énergie cinétique donne :

$dE_m = \delta W + dE_P$ avec δW travail élémentaire de la résultante des forces

Or les forces considérées ici sont supposées conservatives, cela permet alors d'écrire, compte tenu de la définition de l'énergie potentielle : $\delta W = -dE_p$.

Finalement :

$$dE_m = -dE_p + dE_p = 0 \quad \to \quad E_m = Cste$$

4.b. Energie mécanique du point *M*.

L'énergie mécanique du système a pour expression :

$$E_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + kxy$$

Comme l'énergie mécanique est ici une constante du mouvement sa dérivée temporelle est nulle. On obtient :

$$m\left(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}\right) + k\left(x\dot{y} + \dot{x}y\right) = 0 \quad \text{(r)}$$

4.c. Zones interdites du plan.

Le mouvement de la particule doit vérifier l'inéquation suivante :

$$E_c = E_m - E_p \geq 0 \;\Rightarrow\; E_p \leq E_m$$

Dans le cadre de cette étude où l'énergie mécanique est négative, l'énergie potentielle doit vérifier l'inégalité qui suit :

$$E_p \leq 0 \text{ soit } kxy \leq 0 \;\Rightarrow xy \leq 0$$

La particule ne peut donc évoluer dans le premier et troisième quadrant du plan *xOy*.

4.d. Détermination de *x*(*t*).

La particule est soumise à la force $\vec{F}$ et à la réaction $\vec{R}$ de la tige. Dans le référentiel d'étude supposé galiléen la relation de la dynamique s'écrit :

$$\vec{F} + \vec{R} = m\vec{a} \text{ soit dans la base cartésienne :}$$

$$-ky\vec{u}_x - ky\vec{u}_y + R_y\vec{u}_y = m\ddot{x}\vec{u}_x + m\ddot{y}\vec{u}_y$$

La projection suivant $\vec{u}_x$ donne :

$$-ky = m\ddot{x} \;\Rightarrow\; m\ddot{x} + ky = 0 \quad \text{(r')}$$

Ici comme $y = d$ on a $\dot{y} = 0$ et $\ddot{y} = 0$. Ces valeurs introduites dans l'équation (r) donnent :

$$m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}y = 0 \text{ soit pour } \dot{x} \neq 0$$
$$m\ddot{x} + ky = 0$$

On retrouve bien ici l'équation (r') fournie par la relation de Newton car la réaction de la tige est ici une force conservative.

Comme $y = d = \text{constante}$ on obtient, en tenant des conditions initiales :

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}d$$
$$\dot{x} = -\frac{k}{m}dt$$
$$x = -\frac{k}{2m}dt^2$$