M3.12. Mouvement d'une particule dans un champ de force en r $^{-3}$.

Une particule A (masse m) est soumise de la part d'un centre O à une force F = $\vec{F} = \frac{k}{r^3}\vec{u}_r$, k étant une constante, $r = OA$.

1. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle $Ep(r)$, sachant que pour r infini Ep est nul.
2. Exprimer en coordonnées polaires (r, θ) l'énergie cinétique.
3. Grace à la projection de la seconde loi de Newton suivant $\vec{u}_\theta$, montrer que $r^2\dot{\theta} = cste$.
4. Montrer que le mouvement suivant r satisfait à l'équation différentielle :
   $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff} = Em$ où Em est l'énergie mécanique de A et $E_{p,eff}$ un terme énergétique que l'on écrira sous la forme $Ep,eff = K'/r^2$, K' étant une constante que l'on déterminera en fonction de m, k, r et θ.
5. Les conditions initiales sont $r_o \neq 0$ et $\dot{r}_o \neq 0$. Dans le cas où $K' = 0$, quelle est la variation de r en fonction du temps ?
6. On considère le cas général où K' est différent de zéro. Exprimer en fonction de $s = r^2$ l'équation différentielle précédente. En déduire l'équation différentielle du second ordre à laquelle s satisfait. Quelle est alors la relation entre r et t en fonction de Em, m, $r_o, \dot{r}_o$?
7. Représenter graphiquement r en fonction de t pour $\dot{r}_o = 0$ dans les deux états suivants : l'état lié défini par $Em < 0$ et l'état libre défini par $Em > 0$.
   Trouver, en fonction de m, r_o et Em la durée au bout de laquelle A dans l'état lié atteint le point 0.