

M3.11. Equilibre d'un point matériel.

1. Energie potentielle.

L'énergie potentielle de l'anneau est égale à la somme de l'énergie potentielle de pesanteur Ep_p et de l'énergie potentielle élastique Ep_e .

Comme l'axe Oz est vertical et orienté vers le haut, l'énergie potentielle de pesanteur a pour expression :

$$Ep_p = mgz + Cte \text{ avec } z = r \sin \theta$$

L'énergie potentielle élastique vérifie la relation :

$$dEp_e = -\vec{T} \cdot d\vec{OM} = -k\vec{MA} \cdot d(\vec{OA} + \vec{AM}) \text{ car } d\vec{OA} = \vec{0}$$

$$dEp_e = k\vec{AM} \cdot d\vec{AM} = d\left(\frac{1}{2}kAM^2\right)$$

$$Ep_e = \frac{1}{2}kAM^2 + Cte'$$

D'autre part :

$$AM^2 + MB^2 = AB^2$$

$$AM^2 = AB^2 - MB^2 = (2r)^2 - \left(2r \sin \frac{\theta}{2}\right)^2$$

$$AM^2 = (2r)^2 \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) = (2r)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$AM = 2r \cos \frac{\theta}{2}$$

Finalement :

$$Ep = mgr \sin \theta + \frac{1}{2}k \left(2r \cos \frac{\theta}{2}\right)^2 + C \text{ avec } C \text{ une constante.}$$

2. Positions d'équilibre de l'anneau.

Les positions d'équilibre de l'anneau correspondent aux extremums de l'énergie potentielle. D'où :

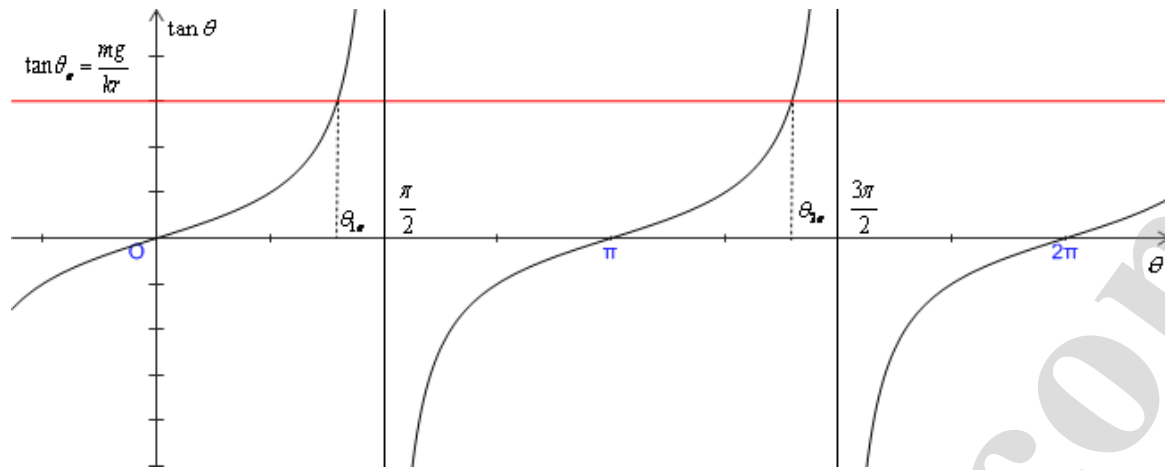
$$\frac{dEp}{d\theta} = mgr \cos \theta - 2kr^2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = r(mg \cos \theta - kr \sin \theta)$$

A l'équilibre :

$$\left(\frac{dEp}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_e} = 0 \Rightarrow mg \cos \theta_e = kr \sin \theta_e$$

$$\tan \theta_e = \frac{mg}{kr} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta_{1e} = \arctan\left(\frac{mg}{kr}\right) \\ \theta_{2e} = \pi + \theta_{1e} \end{cases}$$

L'étude de la courbe ci-dessous montre que la première position d'équilibre se situe entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et que la deuxième se situe entre π et $\frac{3\pi}{2}$.



3. Stabilité des équilibres.

Pour déterminer la nature stable ou instable d'un équilibre, on étudie le signe de la dérivée seconde de l'énergie potentielle :

$$\frac{d^2 Ep}{d\theta^2} = -r (mg \sin \theta + kr \cos \theta) = -r \cos \theta (mg \tan \theta + kr)$$

$$\left(\frac{d^2 Ep}{d\theta^2} \right)_{\theta=\theta_{1e}} = -r \cos \theta_{1e} (mg \tan \theta_{1e} + kr) > 0 \text{ car } \cos \theta_{1e} > 0 \text{ et } \tan \theta_{1e} > 0$$

$$\left(\frac{d^2 Ep}{d\theta^2} \right)_{\theta=\theta_{2e}} = -r \cos \theta_{2e} (mg \tan \theta_{2e} + kr) < 0 \text{ car } \cos \theta_{2e} < 0 \text{ et } \tan \theta_{2e} > 0$$

Cette étude permet d'affirmer que :

θ_{1e} correspond à une position d'équilibre instable ;

θ_{2e} correspond à une position d'équilibre stable.