

M3.10. Recherche de positions d'équilibre stables.

On considère un point matériel P de masse m , attaché à l'extrémité d'un fil inextensible et sans masse, de longueur $OP = a$, accroché en un point fixe O du repère terrestre. On considère le référentiel terrestre galiléen. On considère le champ de pesanteur uniforme: $\vec{g} = g\vec{u}_z$. Oz désigne la verticale descendante. Soit A le point de Oz de cote $z = a$. Les mouvements de P sont considérés plans et repérés au cours du temps par l'angle $\theta = (\vec{OA}, \vec{OP})$.

Un dispositif approprié fait que le point B situé sur l'axe Oz à la cote $b > a$ exerce sur P une force \vec{F} centrale de centre B , répulsive, de norme $\frac{k}{r^2}$ où k est une constante positive et r la distance entre B et P .

Le fil reste tendu et inextensible de longueur a .

Il est à noter que le triangle OPB est non rectangle.

On pose : $\lambda^3 = \frac{kb}{mg}$.

1. Quelle est l'unité de λ ?
2. Exprimer la distance r en fonction de a , b , et θ .
3. Déterminer l'équation du mouvement en θ .

On l'exprimera sous la forme : $\ddot{\theta} = \omega_0^2 \cdot f(\theta)$. Déterminer $f(\theta)$ en fonction de θ , λ et r .

4. Ecrire les équations qui déterminent les valeurs θ_i de θ qui correspondent à d'éventuelles positions d'équilibre.

Déterminer les conditions sur λ pour qu'une position d'équilibre particulière existe. Faire apparaître les trois domaines:

domaine α : $\lambda < \lambda_1$

domaine β : $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$

domaine γ : $\lambda > \lambda_2$,

λ_1 et λ_2 étant des valeurs qu'on déterminera en fonction de a et b .

Dans quel domaine se situe la situation de l'absence de \vec{F} ?

En déduire, pour ce domaine, la stabilité ou instabilité des différentes des différentes positions d'équilibre existantes.