M3.4. Etude d'un système avec ressort. Bifurcation.

1. Energie potentielle.
Comme la masse *m* oscille dans un plan horizontal on peut poser que l'énergie potentielle de pesanteur est nulle dans ce plan. La réaction de l'axe *Ox* ne travaille pas car elle est normale au déplacement. Seule l'énergie potentielle élastique est susceptible d'évoluer dans le temps. Soit *Ep* cette énergie :

$$Ep = \frac{1}{2}k(l - l_o)^2 = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{d^2 + x^2} - l_o\right)^2$$

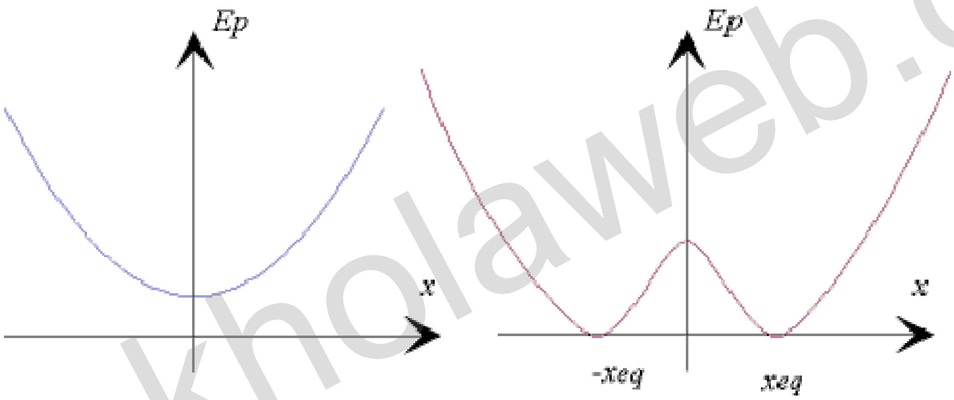
Comme cette fonction est paire, on peut limiter son étude pour x positif :

$$\frac{dEp}{dx} = \frac{kx}{\sqrt{d^2 + x^2}}\left(\sqrt{d^2 + x^2} - l_o\right)$$

Si $d \geq l_o$: la dérivée est toujours positive.

Si $d < l_o$: la dérivée s'annule pour $x_{eq} = \sqrt{l_o^2 - d^2}$

Les graphes d'énergie potentielle sont donc :



$d \geq l_o$ $d < l_o$

Pour $d \geq l_o$, la seule position d'équilibre stable est $x = 0$.
Pour $d < l_o$, $x = 0$ est une position d'équilibre instable et il y a deux positions d'équilibre stable $x_{eq} = \pm\sqrt{l_o^2 - d^2}$

2. Analyse.
Tant que $d \geq l_o$, le ressort est étiré et cela quelle que soit la position de la masse *m* sur l'axe *Ox*. C'est pour la position $x = 0$ que le ressort est le moins étiré et c'est pour cela que cette position constitue un équilibre stable.
Lorsque $d < l_o$, même en $x = 0$, le ressort est comprimé. Cette position reste une position d'équilibre mais elle est instable car toute perturbation écarte la masse *m*. Les nouvelles positions d'équilibre correspondent alors au ressort non tendu.