M2.9. Equilibre d'un point matériel.

1. Equation différentielle.

On étudie la masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Les forces exercées sur ce point sont :

- son poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- l'action du ressort $\vec{T} = k\overrightarrow{MA}$
- l'action $\vec{R}$ du support portée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ du fait de l'absence de frottements

La seconde loi de Newton permet d'écrire que :

$$m\vec{g} + k\overrightarrow{MA} + \vec{R} = m\vec{a}$$
$$m\vec{g} + k\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right) + \vec{R} = m\vec{a}$$

En projection suivant $\vec{u}_\theta$:

$$-mg\cos\theta + kr\sin\theta = mr\ddot{\theta}$$
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r}\cos\theta - \frac{k}{m}\sin\theta = 0$$

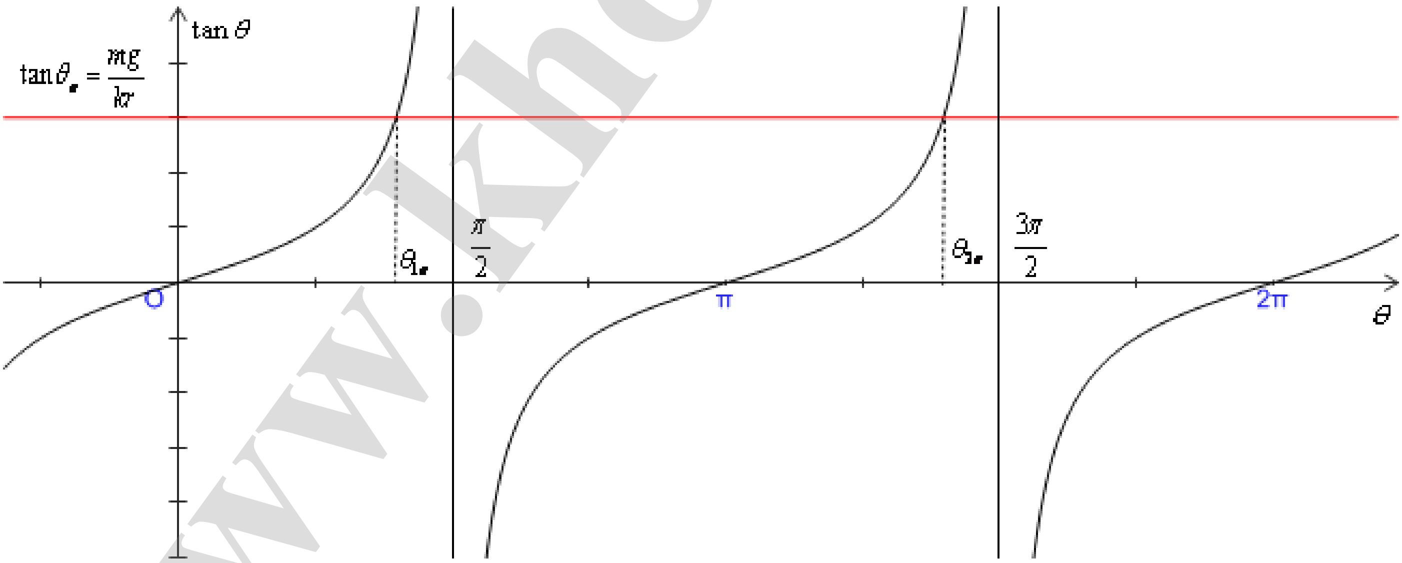
2. Positions d'équilibre.

A l'équilibre on a $\ddot{\theta} = 0$. Les positions d'équilibre vérifient l'équation :

$$\frac{g}{r}\cos\theta_e - \frac{k}{m}\sin\theta_e = 0$$

Soit :

$$\tan\theta_e = \frac{mg}{kr} \text{ avec } 0 \le \theta_e \le 2\pi \text{ et } \tan\theta_e > 0 \text{ car } \frac{mg}{kr} > 0$$



Il y a donc deux positions d'équilibre, une entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et une autre entre π et $\frac{3\pi}{2}$, telles que :

$$\theta_{e1} = \arctan\frac{mg}{kr} \text{ et } \theta_{e2} = \theta_{e1} + \pi$$

3. Nature des équilibres.

Soit $\theta = \theta_e + \varepsilon$. On injecte cette expression dans l'équation différentielle déterminée à la question 1 :

$$\ddot{\varepsilon}+\frac{g}{r}\cos(\theta_e+\varepsilon)-\frac{k}{m}\sin(\theta_e+\varepsilon)=0$$

$$\ddot{\varepsilon}+\frac{g}{r}(\cos\theta_e\cos\varepsilon-\sin\theta_e\sin\varepsilon)-\frac{k}{m}(\sin\theta_e\cos\varepsilon+\sin\varepsilon\cos\theta_e)=0$$

Comme ε<<1 rad on a : $\cos\varepsilon\approx 1$ et $\sin\varepsilon\approx\varepsilon$

$$\ddot{\varepsilon}+\frac{g}{r}(\cos\theta_e-\varepsilon\sin\theta_e)-\frac{k}{m}(\sin\theta_e+\varepsilon\cos\theta_e)=0$$

$$\ddot{\varepsilon}+\underbrace{\left(\frac{g}{r}\cos\theta_e-\frac{k}{m}\sin\theta_e\right)}_{=0\text{ équation de l'équilibre}}-\varepsilon\left(\frac{g}{r}\sin\theta_e+\frac{k}{m}\cos\theta_e\right)=0$$

$$\ddot{\varepsilon}-\varepsilon\cos\theta_e\left(\frac{g}{r}\tan\theta_e+\frac{k}{m}\right)=0$$

$$\ddot{\varepsilon}-\varepsilon\cos\theta_e\left(\frac{g}{r}\frac{mg}{kr}+\frac{k}{m}\right)=0$$

$$\ddot{\varepsilon}-\varepsilon A\cos\theta_e=0 \quad \text{avec } A=\frac{mg^2}{kr^2}+\frac{k}{m}>0$$

La nature du mouvement autour d'une position d'équilibre, donc le caractère stable ou instable de cette position dépend du signe de $A\cos\theta_e$ donc du signe de $\cos\theta_e$:

- si $\cos\theta_e>0$, ε admet alors une solution divergente, la position d'équilibre est instable.
- si $\cos\theta_e<0$, ε admet alors une solution oscillante, la position d'équilibre est stable

Pour $0<\theta_{e1}<\frac{\pi}{2}$, $\cos\theta_{e1}>0$, θ_{e1} est une position d'équilibre instable.

Pour $\frac{\pi}{2}<\theta_{e2}<\frac{3\pi}{2}$, $\cos\theta_{e2}<0$, θ_{e2} est une position d'équilibre stable.