M2.6. Etude d'un mouvement à force centrale avec amortissement.

1. Equations différentielles du mouvement.

On applique dans un référentiel supposé galiléen, la relation de la dynamique au point *P* :

$$-K\overrightarrow{r}-b\overrightarrow{v}+m\overrightarrow{g}+\overrightarrow{R}=m\overrightarrow{a}$$

La projection de cette relation dans la base cylindro-polaire donne :

$$\begin{cases} -Kr-b\dot{r}=m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2) \\ -br\dot{\theta}=m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}) \end{cases}$$

2.a. Equation horaire.

Comme la vitesse angulaire est par hypothèse constante, les équations différentielles précédentes s'écrivent alors :

$$\begin{cases} -Kr-b\dot{r}=m(\ddot{r}-r\omega^2) \\ -br\omega=2m\dot{r}\omega \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} (1) \qquad m\ddot{r}+b\dot{r}+(K-m\omega^2)r=0 \\ (2) \qquad \dfrac{dr}{r}=-\dfrac{b}{2m}dt \end{cases}$$

L'intégration de la relation (2) conduit à :

$$\ln r=-\frac{b}{2m}t+Cte$$

Comme à $t = 0$, $r = a$ on a $Cte = \ln a$. On en déduit :

$$\ln\frac{r}{a}=-\frac{b}{2m}t$$

$$\boxed{r=a\exp -\frac{b}{2m}t}$$

2.b. Vitesse angulaire.

D'après (2) :

$$\dot{r}=-\frac{b}{2m}r \quad\Rightarrow\quad \ddot{r}=-\frac{b}{2m}\dot{r}=\frac{b^2}{4m^2}r$$

L'équation (1) peut alors s'écrire :

$$(\frac{b^2}{4m^2}-\frac{b^2}{2m}+(K-m\omega^2))r=0$$

donc :

$$-\frac{b^2}{4m^2}+(K-m\omega^2)=0$$

La vitesse angulaire a donc pour expression :

$$\boxed{\omega=\sqrt{\frac{K}{m}-\left(\frac{b}{2m}\right)^2}}$$