M2.5. Lancement d'un projectile. Force de frottement.

On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On considère le point *M* de masse *m*. Les forces appliquées à ce système sont :

- son poids $\vec{P} = m\vec{g}$;
- à la force de frottement $\vec{F} = -h\vec{v}$;

On applique la relation de la dynamique :

$$m\vec{g} - h\vec{v} = m\vec{a}$$

On projette cette relation dans la base du référentiel d'étude :

$$\begin{aligned} (1) \quad & -h\dot{x} = m\ddot{x} \\ (2) \quad & -h\dot{y} = m\ddot{y} \\ (3) \quad & -mg - h\dot{z} = m\ddot{z} \end{aligned}$$

On pose :

$$\tau = \frac{m}{h}$$

Pour l'équation (1) :

$$\frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{h}{m}\dot{x} = 0 \quad \rightarrow \dot{x} = A \exp\ -\frac{t}{\tau}$$

En tenant compte des conditions initiales suivant Ox :

$$\dot{x} = v_0 \cos\alpha \exp\ -\frac{t}{\tau}$$

Une seconde intégration conduit à :

$$x = -\tau v_0 \cos\alpha \exp\ -\frac{t}{\tau} + C$$

Comme à $t = 0$, $x(t=0) = 0$ on a:

$$C = \tau v_0 \cos\alpha$$

D'où:

$$x = \tau v_0 \cos\alpha (1 - \ \exp\ -\frac{t}{\tau})$$

Pour l'équation (2):

$$\frac{d\dot{y}}{dt}+\frac{h}{m}\dot{y}=0 \quad \rightarrow \dot{y}=B\exp\ -\frac{t}{\tau}$$

Comme à t = 0 la composante de la vitesse suivant Oy est nulle, on a B = 0. Une seconde intégration conduit, compte tenu du fait que l'objet part de la position O à t = 0, à y = 0. Le mouvement du système est donc contenu dans le plan Ox, Oy.

Pour l'équation (3) :

$$\frac{d\dot{z}}{dt}+\frac{h}{m}\dot{z}=-g \quad \rightarrow \dot{z}=A''(\exp\ -\frac{t}{\tau})-g\tau$$

A t = 0, on a :

$$v_o \sin\ \alpha = A'' - g\tau \quad \Rightarrow\ A'' = v_o \sin\ \alpha + g\tau$$

La composante de la vitesse suivant Oz a pour expression :

$$\dot{z}=(v_o \sin\alpha + g\tau)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)-g\tau$$

Une seconde intégration conduit à :

$$z=-\tau(v_o \sin\ \alpha+g\tau)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)-g\tau t+C'$$

Comme l'objet part de O à la date du lancement, on a à la date t = 0 :

$$C'=\tau(v_o \sin\ \alpha+g\tau)$$

On obtient pour la composante z :

$$z=\tau(v_o \sin\ \alpha+g\tau)(1-\ \exp\ -\frac{t}{\tau})-g\tau t$$

L'équation horaire $x(t)$ permet d'écrire :

$$(1-\ \exp\ -\frac{t}{\tau})=\frac{x}{\tau v_o \cos\alpha} \qquad t=-\tau\ln\left(1-\frac{x}{\tau v_o \cos\alpha}\right)$$

En substituant dans l'équation $z(t)$, on obtient :

$$z=\frac{v_o \sin\alpha+g\tau}{v_o \cos\alpha}x+g\tau^2(\ln\ (1-\frac{x}{\tau v_o \cos\alpha}))$$

Par identification avec la forme demandée on a :

$$K_1=\frac{v_o \sin\ \alpha+g\tau}{v_o \cos\alpha} \qquad K_2=g\tau^2 \qquad K_3=\frac{1}{\tau v_o \cos\alpha}$$