

M2.3 Mouvement d'une sphère dans un liquide.

Une pièce sphérique homogène S , de masse m et de rayon a , pénètre verticalement dans un bassin de stockage, rempli sur une hauteur h , d'un liquide de masse volumique μ .

Le centre de la pièce " plonge " à l'instant $t = 0$ en O , à la distance a de la surface libre du liquide à l'intérieur du bassin, avec une vitesse verticale de plongée v_0 .

On tiendra compte de la force de viscosité de norme f opposée au déplacement et proportionnelle à la vitesse de S (k est une constante positive). On rappelle que la poussée d'Archimède est égale et opposée au poids du volume de liquide déplacé.

On donne :

$$m = 1,4 \text{ kg} ; a = 3,5 \text{ cm} ; \mu = 860 \text{ kg.m}^{-3} ; k = 0,5 \text{ SI} ; v_0 = 2 \text{ m/s} ; g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}.$$

1. Ecrire l'équation $v(t)$ de l'évolution au cours du temps de la vitesse du centre G de S dans le liquide en faisant intervenir la vitesse limite v_L de S . On sera amené à réfléchir sur le signe de la composante de la vitesse suivant l'axe Oz .
2. Déterminer la loi $z(t)$ du déplacement vertical de S dans le liquide, comptée à partir de O .
3. Montrer que le temps T , mis par la pièce pour se mouvoir de O jusqu'au fond du bassin, obéit à une équation du second degré si on se contente d'un développement limité de $\exp x$ limité au second ordre.
On donne : $\exp x = 1 + x + x^2/2$ pour $x \ll 1$.

Calculer T avec le fond du bassin rempli d'une hauteur de liquide $h = 2,35\text{m}$?