M2.8. Parabole de sûreté.

1. Choix de l'angle de tir.

On étudie le mouvement du projectile, assimilé à un point, dans le référentiel terrestre supposé ici galiléen. On admet aussi que ce système est uniquement soumis à son poids.

La seconde loi de Newton permet d'écrire dans ces conditions :

$$m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

La projection de cette équation suivant les différents vecteurs de la base cartésiennes et les intégrations successives (en tenant compte des conditions initiales) permettent d'écrire :

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g \end{cases} \quad \vec{v}\begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = v_o \cos\alpha \\ v_z = -gt + v_o \sin\alpha \end{cases} \quad \overrightarrow{OM}\begin{cases} x = 0 \\ y = v_o t \cos\alpha \quad (1) \\ z = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_o t \sin\alpha \quad (2) \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire s'obtient en éliminant le temps des équations :

(1) permet décrire que : $t = \dfrac{y}{v_o \cos\alpha}$. En injectant ce résultat dans (2), on obtient :

$$z = -\frac{1}{2} g \frac{y^2}{v_o^2 \cos^2\alpha} + y \tan\alpha$$

Si le projectile atteint le point *M*, les coordonnées $\left(y_M, z_M\right)$ de ce point vérifient :

$$z_M = -\frac{1}{2} g \frac{y_M^2}{v_o^2 \cos^2\alpha} + y_M \tan\alpha$$

Soit $u = \tan\alpha \quad \rightarrow \cos^2\alpha = \left(1 + \tan^2\alpha\right)^{-1} = \left(1 + u^2\right)^{-1}$. En substituant ces expressions dans l'équation de la trajectoire :

$$z_M + \frac{1}{2} g \frac{y_M^2}{v_o^2}\left(1 + u^2\right) - y_M u = 0$$

$$\frac{1}{2} g \frac{y_M^2}{v_o^2} u^2 - y_M u + \left(\frac{1}{2} g \frac{y_M^2}{v_o^2} + z_M\right) = 0$$

Cette équation a pour discriminant :

$$\Delta = y_M^2 - 4\frac{1}{2} g \frac{y_M^2}{v_o^2}\left(\frac{1}{2} g \frac{y_M^2}{v_o^2} + z_M\right)$$

Si :

$\Delta < 0$ il n'y a pas de solution réelle, le point M n'est pas accessible ;

$\Delta = 0$ le problème a une solution ;

$\Delta > 0$ le point M peut être atteint de deux manières : tir "tendu" ou tir en "cloche".

Le point *M* est atteint si $\Delta \geq 0$:

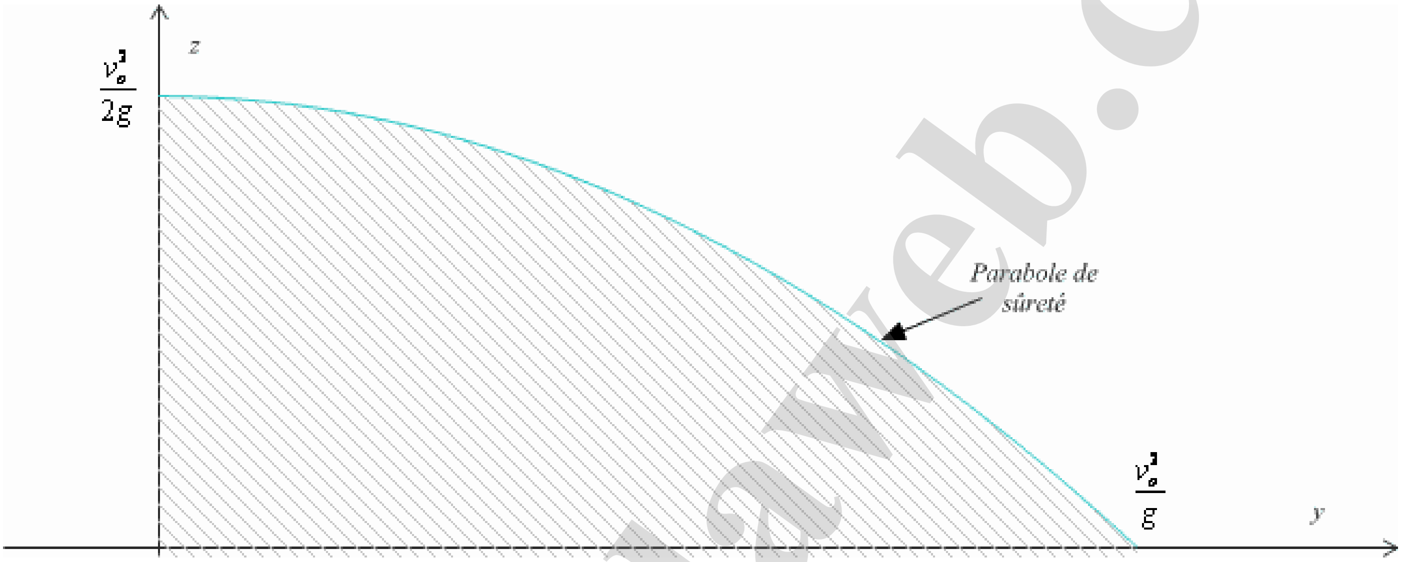
$$\Delta = y_M^2 - 4\frac{1}{2}g\frac{y_M^2}{v_o^2}\left(\frac{1}{2}g\frac{y_M^2}{v_o^2} + z_M\right) \geq 0$$

$$y_M^2 - \frac{g^2 y_M^2}{v_o^4} - 2g\frac{y_M^2}{v_o^2}z_M \geq 0$$

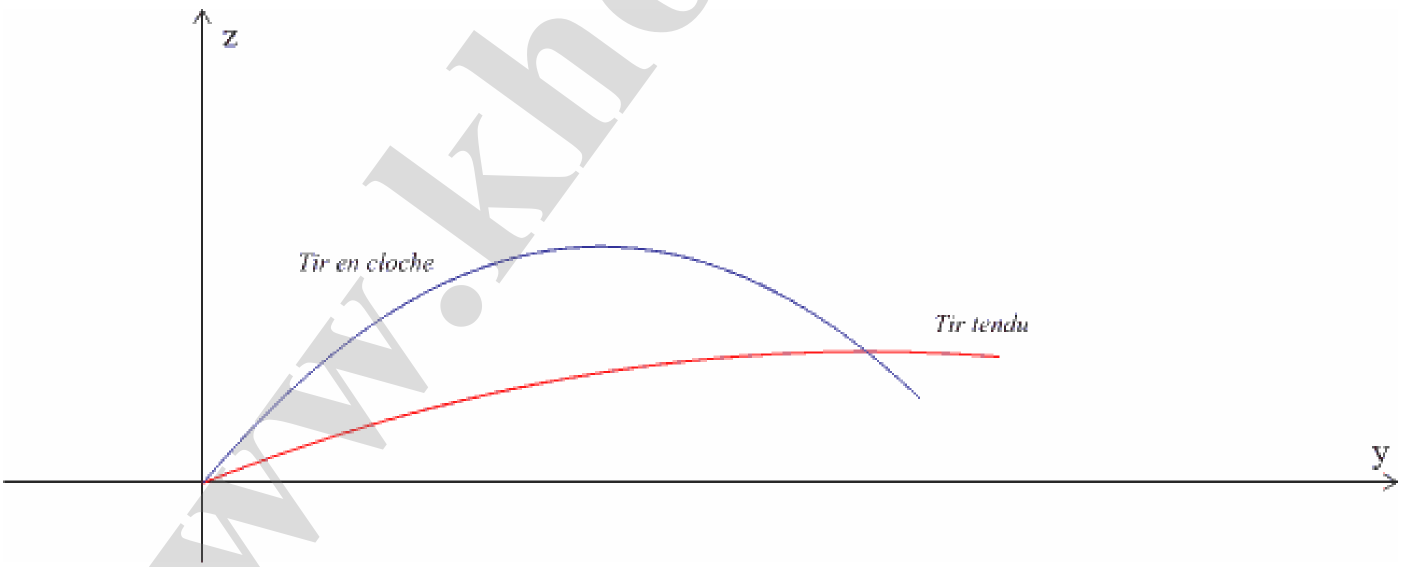
$$z_M \leq \left(y_M^2 - \frac{g^2 y_M^4}{v_o^4}\right)\frac{v_o^2}{2gy_M^2}$$

$$z_M \leq \left(\frac{v_o^2}{2g} - \frac{gy_M^2}{2v_o^2}\right)$$

On obtient ainsi ce que l'on désigne par « parabole de sûreté » :



Les points accessibles du plan *(Oyz)* sont situés dans la zone hachurée, ceux qui se trouvent au dessus ne peuvent être atteints par le projectile pour un angle donné et une vitesse initiale donnée.



www.kholaweb.com