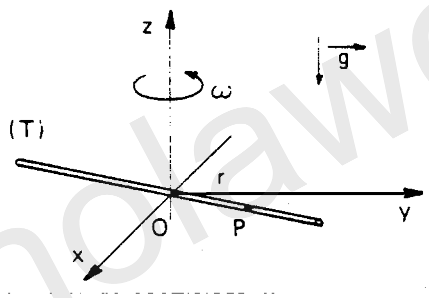
M2.11. Mouvement d'une bille dans un tube.

Le problème envisage l'évolution d'une bille *B*, de masse *m*, quasi-ponctuelle, soumise à la pesanteur et susceptible de déplacements à l'intérieur d'un tube cylindrique mince *T*, de longueur 2*l*, effectuant un mouvement caractérisé par une vitesse angulaire ω autour d'un axe contenant son centre *O*. L'accélération de la pesanteur est $\vec{g}$, de module *g* constant, et dirigée selon la verticale descendante.

On note $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ le vecteur de la position de *B* dans *T* à l'instant *t*, et *r* = *OP* la distance *OP*.
Les grandeurs r_o et $\dot{r}_o$ caractérisent la position et la vitesse radiale de *B* à l'instant initial *t* = 0.
Le tube *T* est dans le plan horizontal (*x*, *y*) et tourne autour de l'axe *Oz* à la vitesse angulaire ω constante.



A. Les mouvements de la bille *B* ont lieu sans frottements.

1. Par application de la seconde loi de Newton dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, établir l'équation différentielle en *r* du mouvement de *B*. On travaillera avec la base cylindro-polaire $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z\right)$.
2. Déterminer la solution de cette équation différentielle pour les conditions initiales r_o, $\dot{r}_o = 0$.
3. Etablir l'expression du temps τ que mettra *B* pour sortir du tube *T*.
4. Application numérique : Calculer τ pour *l* = 0,10 m, $r_o = 0{,}10$ m, $\dot{r}_o = 0, \omega = 2$ radians.s^{-1}.

B. Les mouvements de la bille *B* sont soumis à une force de frottement solide de coefficient μ. On a alors, lorsqu'il y a mouvement, la relation suivante :

$$R_T = \mu R_N$$

où R_N est la norme de la composante normale à la tige de la réaction $\vec{R}$ et R_T la norme de la composante tangentielle suivant la direction de la tige. La réaction peut se mettre sous la forme :
$\vec{R} = -R_T \vec{u}_r + \vec{R}_N = R_r \vec{u}_r + R_\theta \vec{u}_\theta + R_z \vec{u}_z$

5. Etablir l'équation différentielle en *r* du mouvement de *B*.
6. En déduire la loi $\dot{r} = f\left(r\right)$ liant la vitesse radiale et la position de *B* pour la condition $\dot{r}\left(0\right) = \dot{r}_o$ en *r* = 0.
   On posera que $g >> 2\omega v$ pour résoudre l'équation différentielle obtenue qui n'est pas linéaire.
7. On constate que *B* s'arrête à la cote $r = r_1$.
   Cette constatation expérimentale permet-elle de justifier l'approximation effectuée en 6 ?
   En déduire l'expression du coefficient de frottement μ en fonction de g, ω, v_o et r_1.
8. Application numérique: Calculer μ pour que *B* s'arrête au bout du tube, avec $g = 9{,}81$ m.s^{-2}, $l = 0{,}1$ m, $v_o = 0{,}5$ m.s^{-1}, $\omega = 2$ radians.s^{-1}.