M11.5. Chute d'un objet vers le Soleil.

On se place dans le référentiel barycentrique *R** et on étudie le mouvement relatif des deux masses en utilisant la particule fictive *P* soumise à la force de gravitation qu'exerce la masse *M* sur la masse *m*.
La force de gravitation a pour expression :

$$\overrightarrow{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

Cette force dérive de l'énergie potentielle *Ep* que l'on détermine :

$$\overrightarrow{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\overrightarrow{u_r} = -\overrightarrow{grad}Ep = -\frac{dEp}{dr}\overrightarrow{u_r}$$

$$\frac{dEp}{dr} = G\frac{Mm}{r^2} = -GMm\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$Ep = -G\frac{Mm}{r} + Cte$$

En posant l'énergie potentielle nulle à l'infini on trouve la constante d'intégration nulle.

Le mouvement de la particule *F* s'effectue avec conservation de l'énergie mécanique.
Dans *R** et comme la vitesse n'a qu'une composante radiale tout au long du mouvement on a :

$$Em^* = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - G\frac{Mm}{r} = -G\frac{Mm}{r_o}$$

où la masse réduite du système est :

$$\mu = \frac{Mm}{M+m}$$

La vitesse s'écrit :

$$\left(\frac{dr}{dt}\right) = -\left(\frac{2}{\mu}GMm\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_o}\right)\right)^{\frac{1}{2}} == -\left(2G(M+m)\left(\frac{1}{r}-\frac{\mathbf{1}}{r_o}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\left(2G\frac{M+m}{r_o}\left(\frac{r_o}{r}-1\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Un signe négatif apparaît car la composante de la vitesse est négative suivant l'axe radial lorsque les deux masses se rapprochent.
On sépare les variables :

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{r_o}{r}-1}} = -\sqrt{2G\frac{M+m}{r_o}}dt$$

On effectue le changement de variable suivant :

$$\frac{r}{r_o} = \sin^2\theta \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

On a alors :

$$dr = 2r_o\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{r_o}{r}-1}} = \frac{2r_o\sin\theta\cos\theta d\theta}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\theta}-1}} = 2r_o\sin^2\theta d\theta = r_o(1-\cos 2\theta)d\theta$$

On obtient :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} r_o(1-\cos 2\theta)d\theta = -\int_0^{t_o}\sqrt{2G\frac{M+m}{r_o}}dt$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos 2\theta)d\theta = -\sqrt{2G\frac{M+m}{r_o^3}}t_o$$

$$\frac{\pi}{2} = \sqrt{2G\frac{M+m}{r_o^3}}t_o$$

$$t_o = \pi\sqrt{\frac{r_o^3}{8G(M+m)}}$$

$$\boxed{t_o = \pi\sqrt{\frac{r_o^3}{8G(M+m)}}}$$