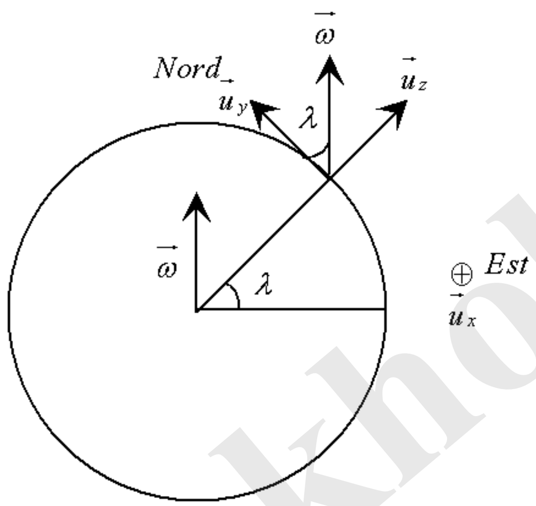
M10.4. Usure inégale des rails de chemin de fer.

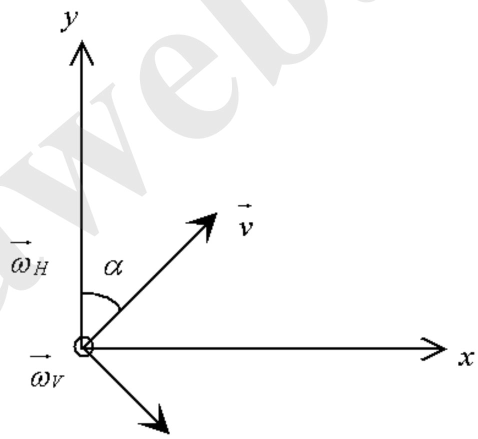
On étudie dans le référentiel terrestre le wagon de masse *m*. Le référentiel d'étude choisi est non galiléen.

Le wagon est soumis à :

$\vec{P} = m\vec{g}$	Poids de *m*
$\vec{R}$	Réaction des rails
$\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$	Force d'inertie de Coriolis
	$\vec{\omega}$ vecteur rotation de la Terre par rapport au référentiel géocentrique
	$\vec{v}$ vecteur vitesse du wagon dans le référentiel terrestre.

La force d'inertie d'entraînement est incluse dans le poids. On fait l'hypothèse que cette force n'intervient pas en fait dans le sens du vecteur poids mais seulement par sa valeur dans la mesure du poids. C'est pourquoi le vecteur $\vec{P}$ est porté par $\vec{u}_z$ dans le schéma suivant :





La relation de la dynamique s'écrit dans le référentiel terrestre :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ic} = \vec{0}$$

Le wagon est animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme dans le référentiel terrestre.

On décompose la réaction des rails en une force :
contenue dans le plan horizontal de la trajectoire $\vec{R}_H = -\vec{F}_H$
verticale au plan de la trajectoire $\vec{R}_V = -\vec{F}_V$

Le principe des actions réciproques permet de faire intervenir les forces demandées $\vec{F}_H$ et $\vec{F}_V$ action horizontale et verticale du wagon sur les rails.

La décomposition du vecteur rotation de la Terre dans la base du référentiel terrestre permet de faire apparaître deux composantes de la force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v} = -2m\left(\vec{\omega}_H + \vec{\omega}_V\right) \wedge \vec{v} = -2m\left(\omega \cos\lambda \vec{u}_y + \omega \sin\lambda \vec{u}_z\right) \wedge \vec{v}$$

$$\vec{F}_{ic} = \vec{F}_{icV} + \vec{F}_{icH}$$

$$\vec{F}_{icV} = -2m\vec{\omega}_H \wedge \vec{v} = -2m\omega \cos\lambda \vec{u}_y \wedge \vec{v} = 2m\omega v \sin\alpha \cos\lambda \vec{u}_z$$

$$\vec{F}_{icH} = -2m\vec{\omega}_V \wedge \vec{v} = -2m\omega \sin\lambda \vec{u}_z \wedge \vec{v} = 2m\omega v \sin\lambda \vec{u}$$

$\vec{u}$ vecteur unitaire contenu dans le plan horizontal, perpendiculaire au vecteur vitesse et orienté vers la droite du mouvement

On écrit alors la relation de la dynamique sous la forme suivante :

$$\vec{P} - \vec{F}_H - \vec{F}_V + \vec{F}_{icH} + \vec{F}_{icV} = \vec{0}$$

Comme le mouvement est plan :

$$\vec{P} - \vec{F}_V + \vec{F}_{icV} = \vec{0}$$

$$\vec{F}_V = \vec{P} + \vec{F}_{icV} = -mg\vec{u}_z + 2m\omega v \sin\alpha \cos\lambda \vec{u}_z$$

Comme le mouvement est rectiligne :

$$-\vec{F}_H + \vec{F}_{icV} = \vec{0}$$

$$\vec{F}_H = \vec{F}_{icV} = 2m\omega v \sin\lambda \vec{u}$$

Applications numériques :

$$F_{Vz} = -mg + 2m\omega v \sin\alpha \cos\lambda$$

$$F_{Vz} = -50.10^3 \times 10 + 2 \times 50.10^3 \times \frac{2 \times 3,14}{86164} \times 1 \times \cos 45 \times \frac{300.10^3}{3600} = -4,99.10^5$$

$$F_V = 4,99.10^5 \text{ N}$$

$$F_H = 2m\omega v \sin\lambda$$

$$F_H = 2 \times 50.10^3 \times \frac{2 \times 3,14}{86164} \times 1 \times \sin 45 \times \frac{300.10^3}{3600} = 4,30.10^2 \text{ N}$$

$\vec{F}_{icV}$ représente une modification mineure du poids du wagon.
$\vec{F}_{icH}$ est responsable de l'usure interne du rail droit.