M1.11. Courbe d'équation *r* =*a*exp*θ*.

1. Equation différentielle.

Dans le cas d'un mouvement plan, l'accélération d'un point s'écrit en coordonnées cylindro-polaires sous la forme :

$$\vec{a}\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$$

On exprime l'accélération radiale en faisant intervenir l'expression de *r*.

On a :

$$r = a\exp\theta \ ; \ \dot{r} = a\dot{\theta}\exp\theta = r\dot{\theta} \ ; \ \ddot{r} = \dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

L'accélération radiale peut s'écrire :

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} + r\dot{\theta}^2$$

L'égalité proposée par le texte permet d'écrire :

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 2\left(\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} + r\dot{\theta}^2\right)$$

Soit :

$$\boxed{\ddot{\theta} - 2\dot{\theta}^2 = 0}$$

2. Résolution de l'équation différentielle.

Comme l'équation différentielle établie n'est pas linéaire, on effectue un changement de variable pour la résoudre. On pose : $u = \dot{\theta}$

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\frac{du}{dt} - 2u^2 = 0$$

On sépare les variables :

$$\frac{du}{u^2} = 2dt \ \text{ or } \ \frac{du}{u^2} = -\frac{d}{du}\left(\frac{1}{u}\right) = 2dt$$

D'où :

$$-\frac{1}{u} = 2t + Cte$$

Or à $t = 0$ on a $-\dfrac{1}{u(0)} = Cte$

On obtient :

$$-\frac{1}{u} = 2t - \frac{1}{u(0)} \rightarrow u = \frac{u(0)}{1 - 2u(0)t}$$

$$\boxed{\dot{\theta}(t) = \frac{\dot{\theta}_o}{1 - 2\dot{\theta}_o t}}$$

Pour déterminer l'expression de l'angle polaire, on intègre le denier résultat :

$$\dot{\theta}(t)=\frac{\dot{\theta}_o}{1-2\dot{\theta}_o t}\Leftrightarrow\frac{d\theta}{dt}=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln\left(1-2\dot{\theta}_o t\right)=\frac{d}{dt}\ln\left(1-2\dot{\theta}_o t\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\theta=\ln\left(1-2\dot{\theta}_o t\right)^{-\frac{1}{2}}+Cte'$$

Comme à $t = 0$, l'angle polaire est nul, on a *Cste'* = 0. On obtient :

$$\boxed{\theta=\ln\left(1-2\dot{\theta}_o t\right)^{-\frac{1}{2}}}$$

Le rayon polaire peut alors s'exprimer en fonction du temps sous la forme :

$$r=a\exp\theta=a\exp\left(\ln\left(1-2\dot{\theta}_o t\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\boxed{r=a\frac{1}{\left(1-2\dot{\theta}_o t\right)^{\frac{1}{2}}}}$$

Pour $\dot{\theta}_o>0$ on doit avoir $t<\dfrac{1}{2\dot{\theta}_o}$ et on a : $\lim\limits_{t\to\frac{1}{2\dot{\theta}_o}} r==+\infty$

Pour $\dot{\theta}_o<0$ on a $\left(1-2\dot{\theta}_o t\right)^{-\frac{1}{2}}>0$ pour $t > 0$ et on a : $\lim\limits_{t\to\infty} r=0$