

M1.9. Mouvement d'un point matériel sur une sextique.

1. Vitesse

Le vecteur vitesse s'exprime dans la base cylindro-polaire et dans le cas d'un mouvement contenu dans plan (xOy) sous la forme :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

En tenant compte de l'expression de r , on obtient :

$$\vec{v} = 4b3\cos^2\frac{\theta}{3}\left(-\sin\frac{\theta}{3}\right)\frac{\dot{\theta}}{3}\vec{u}_r + 4b\dot{\theta}\cos^3\frac{\theta}{3}\frac{\dot{\theta}}{3}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v} = 4b\dot{\theta}\cos^2\frac{\theta}{3}\left(-\sin\frac{\theta}{3}\vec{u}_r + \cos\frac{\theta}{3}\vec{u}_\theta\right)$$

La valeur de la vitesse est :

$$v = 4b\dot{\theta}\cos^2\frac{\theta}{3}$$

2. Longueur.

A partir de la définition de la vitesse, on détermine la relation entre s et θ :

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{ds}{d\theta} \dot{\theta}$$

Par identification avec l'expression de v déterminée à la question 1, on obtient :

$$\frac{ds}{d\theta} = 4b\cos^2\frac{\theta}{3} \rightarrow ds = 4b\cos^2\frac{\theta}{3}d\theta$$

$$L = \int_0^{3\pi/2} 4b\cos^2\frac{\theta}{3}d\theta = \int_0^{3\pi/2} 4b\frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{2}{3}\theta\right)d\theta$$

$$L = 2b\left(\left[\theta\right]_0^{3\pi/2} + \left[\frac{3}{2}\sin\frac{2}{3}\theta\right]_0^{3\pi/2}\right)$$

$$L = 3\pi b$$

3. Durée T.

Comme la vitesse angulaire est une constante, on peut alors l'écrire sous la forme :

$$\dot{\theta} = \frac{\Delta\theta}{T} = \frac{3\pi}{2T}$$

$$T = \frac{3\pi}{2\dot{\theta}}$$

4. Accélération.

Le vecteur accélération s'exprime dans la base cylindro-polaire, dans le cas d'un mouvement contenu dans le plan (xOy) et de vitesse angulaire constante sous la forme :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

On calcule les différentes dérivées successives de r :

$$\dot{r} = -4b\dot{\theta} \cos^2 \frac{\theta}{3} \sin \frac{\theta}{3}$$

$$\ddot{r} = -4b \frac{\dot{\theta}^2}{3} \cos \frac{\theta}{3} \left(-2 \sin^2 \frac{\theta}{3} + \cos^2 \frac{\theta}{3} \right)$$

On obtient en regroupant les termes :

$$\ddot{a} = \begin{cases} a_r = -\frac{4}{3}b\dot{\theta}^2 \cos \frac{\theta}{3} \left(-2 \sin^2 \frac{\theta}{3} + 4 \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) \\ a_\theta = -8b\dot{\theta}^2 \cos^2 \frac{\theta}{3} \sin \frac{\theta}{3} \end{cases}$$

5. Paramètre α .

On a :

$$\frac{dv}{dt} = -\alpha v \rightarrow \frac{dv}{v} = -\alpha dt$$

L'intégration donne :

$$\ln v = -\alpha t + \ln K$$

$$v = K \exp(-\alpha t)$$

Comme à $t=0$, $v(0) = v_o = K$, la vitesse s'écrit :

$$v = v_o \exp(-\alpha t) = \frac{ds}{dt}$$

D'où :

$$ds = v_o \exp(-\alpha t) dt$$

Le mouvement s'arrêtera au bout d'une durée infinie. La longueur totale L s'obtient par sommation des abscisses curvilignes élémentaires. Soit :

$$L = \int_0^\infty v_o \exp(-\alpha t) dt = \left[-\frac{1}{\alpha} v_o \exp(-\alpha t) \right]_0^\infty$$

$$L = \frac{1}{\alpha} v_o = 3\pi b$$

$$\alpha = \frac{v_o}{3\pi b}$$