M1.7. Mouvement sur une parabole.

1. Coordonnées du vecteur vitesse.

Dans la base cylindrique, les coordonnées du vecteur vitesse sont :

$$\vec{v}\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases}$$

Or :

$$r\cos^2\frac{\theta}{2} = a \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(r\cos^2\frac{\theta}{2}\right) = 0$$

$$\dot{r}\cos^2\frac{\theta}{2} - r\dot{\theta}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_r = \dot{r} = a\dot{\theta}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos^3\frac{\theta}{2}}$$

On obtient pour la coordonnée orthoradiale :

$$v_\theta = r\dot{\theta} = a\dot{\theta}\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

Il faut maintenant exprimer la vitesse angulaire :

$$v = kr \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = a\dot{\theta}\frac{1}{\cos^3\frac{\theta}{2}} = k\frac{a}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\dot{\theta} = k\cos\frac{\theta}{2}$$

Le cosinus du demi-angle polaire étant positif.

Finalement on obtient :

$$\boxed{\vec{v}\begin{cases} v_r = \dot{r} = ka\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}} \\ v_\theta = r\dot{\theta} = ka\dfrac{1}{\cos\frac{\theta}{2}} \end{cases}}$$

2. Equation horaire.

On utilise l'expression de la vitesse angulaire obtenue :

$$\dot{\theta} = k\cos\frac{\theta}{2} \quad \Rightarrow \frac{d\theta}{\cos\frac{\theta}{2}} = kdt \quad \Rightarrow 2\ln\left(\left|\tan\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right) = kt + cste$$

Compte tenu du domaine de définition de l'angle polaire la tangente de l'expression obtenue est positive.

Comme à la date t = 0 l'angle polaire est nulle, on a :

$$2\ln\left(\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|\right) = cste \quad \Rightarrow cste = 0$$

On obtient :

$$\boxed{2\ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = kt}$$