M1.2. Mouvement d'un point matériel sur une courbe hélicoïdale.
Enoncé.

On considère un cylindre circulaire droit de rayon r = cste et de hauteur $2\pi r$, auquel est lié un repère orthonormé direct $Oxyz$: Oz est l'axe vertical du cylindre et Oxy est la base inférieure horizontale. La face latérale porte un tube mince de forme hélicoïdale HB dans lequel se déplace un petit objet M de masse m assimilable à un point matériel. La définition paramétrique de la trajectoire de M est:

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = r(2\pi - \theta) \text{ avec } 0 < \theta < 2\pi.$$

Le point H correspond à $\theta = 0$ et le point B à $\theta = 2\pi$.

1. Calculer, en fonction de $\theta(t)$ et de ses dérivées, l'accélération de M en coordonnées cartésiennes.
2. Calculer, en fonction de $\theta(t)$ et de ses dérivées, l'accélération de M en coordonnées cylindriques.

M1.2. Mouvement d'un point matériel sur une courbe hélicoïdale.
Corrigé.

1. Accélération en coordonnées cartésiennes.

Le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$. Les vecteurs de base sont constants au cours du temps, leur dérivée par rapport au temps est nulle.

On a alors :

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = r(2\pi - \theta) \end{cases} \quad \vec{v}\begin{cases} \dot{x} = -r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = r\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{z} = -r\dot{\theta} \end{cases} \quad \vec{a}\begin{cases} \ddot{x} = -r\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right) \\ \ddot{y} = r\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) \\ \ddot{z} = -r\ddot{\theta} \end{cases}$$

2. Accélération en coordonnées polaires.

Le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z \quad \text{avec } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Les vecteurs de base $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta\right)$ ne sont pas constants au cours du temps. On a alors avec r constant :

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta - r\dot{\theta}\vec{u}_z \\ &\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - r\ddot{\theta}\vec{u}_z \end{aligned}}$$