M1.10. Mouvement d'un point matériel.

1. Composantes cartésiennes des vecteurs vitesse et accélération.

Le vecteur position est défini par :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x = r_o e^{\theta} \cos\theta \\ y = r_o e^{\theta} \sin\theta \\ z = r_o \ln(1+\theta) \end{cases} \quad \text{où } r_o \text{ est une constante positive}$$

Le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \begin{cases} \dot{x} = r_o\dot{\theta}e^{\theta}\left(\cos\theta - \sin\theta\right) \\ \dot{y} = r_o\dot{\theta}e^{\theta}\left(\cos\theta + \sin\theta\right) \\ \dot{z} = r_o\dot{\theta}\dfrac{1}{1+\theta} \end{cases}$$

Pour le vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{cases} \ddot{x} = -2\sin\theta r_o\dot{\theta}^2 e^{\theta} \\ \ddot{y} = 2\cos\theta r_o\dot{\theta}^2 e^{\theta} \\ \ddot{z} = -r_o\dot{\theta}^2\dfrac{1}{(1+\theta)^2} \end{cases}$$

2. Module des vecteurs.

Vitesse du point :

$$v = r_o\left|\dot{\theta}\right|\left(2e^{2\theta} + \frac{1}{\left(1+\theta\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Accélération du point :

$$a = r_o\dot{\theta}^2\left(4e^{2\theta} + \frac{1}{\left(1+\theta\right)^4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

3. Vecteur position en coordonnées cylindro-polaires.

Dans la base cylindro-polaire, le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$$

La distance radiale r est définie par :

$$r = \left(x^2 + y^2\right)$$

D’où :

$$r = r_o e^{\theta}$$

Le vecteur position s’écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r_o(e^{\theta}\vec{u}_r + \ln(1+\theta)\vec{u}_z)$$

4. Composantes cylindro-polaires de la vitesse et de l’accélération.

$$\vec{v} = r_o \frac{d}{dt}\left(e^{\theta}\vec{u}_r + \ln(1+\theta)\vec{u}_z\right)$$

$$\vec{v} = r_o\dot{\theta}\left(e^{\theta}\vec{u}_r + e^{\theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{1+\theta}\vec{u}_z\right)$$

Comme la vitesse angulaire est une constante :

$$\vec{a} = r_o\dot{\theta}\left(\dot{\theta}e^{\theta}\vec{u}_r + \dot{\theta}e^{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{\theta}e^{\theta}\vec{u}_\theta - \dot{\theta}e^{\theta}\vec{u}_r - \dot{\theta}\frac{1}{(1+\theta)^2}\vec{u}_z\right)$$

$$\vec{a} = r_o\dot{\theta}^2\left(2e^{\theta}\vec{u}_\theta - \frac{1}{(1+\theta)^2}\vec{u}_z\right)$$