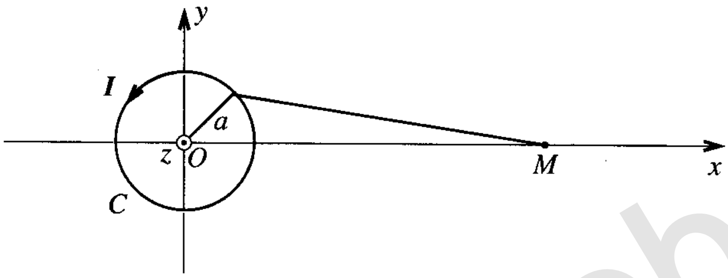
EM8.1. Champ magnétique en un point du plan d'une spire.

Enoncé.



Une spire circulaire de centre *O*, de rayon *a* et d'axe (*Oz*) est parcourue par un courant d'intensité *I*. Un point courant *P* de la spire est repéré par l'angle φ que fait le vecteur $\overrightarrow{OP}$ avec l'axe (*Ox*) de référence.

1. Montrer que la composante *Bz* du champ magnétique créé en un point *M* de l'axe (*Ox*) très éloigné de la spire (*a*/*x* << 1) s'écrit :

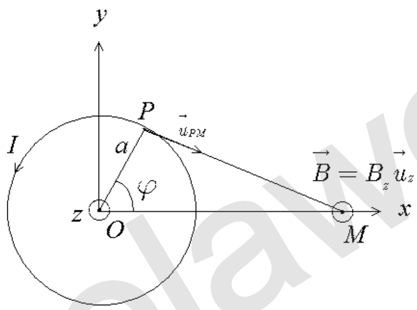
$$Bz = \frac{\mu_o I}{4\pi x}\int_0^{2\pi} \frac{u^2 - u\cos\varphi}{(1-2u\cos\varphi + u^2)^{3/2}}\, d\varphi \quad \text{avec } u = \frac{a}{x}$$

2. Effectuer un développement limité en *u* de l'intégrale et obtenir la partie principale du champ $\vec{B}(M)$. Vérifier que ce champ est bien celui créé par un dipôle magnétique au même point.

EM8.1. Champ magnétique en un point du plan d'une spire.
Corrigé.

1. Expression de la composante B_z du champ magnétique.
Le plan contenant le point *M* et perpendiculaire à l'axe *Oz* est un plan de symétrie de la distribution de courants, le champ magnétique $\vec{B}$ engendré est donc perpendiculaire à ce plan (*Oxy*) en *M*. Soit :

$$\vec{B} = B_z \vec{u}_z$$



On utilise la loi de Biot et Savart :

$$\vec{B}(M) = \oint_C \frac{\mu_o I}{4\pi} \vec{dl}_P \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Or :

$$\overrightarrow{OP}\begin{cases} a\cos\varphi \\ a\sin\varphi \\ 0 \end{cases} \quad \overrightarrow{OM}\begin{cases} x \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad \overrightarrow{PM}\begin{cases} x - a\cos\varphi \\ -a\sin\varphi \\ 0 \end{cases} \quad d\overrightarrow{OP} = \vec{dl}_P \begin{cases} -a\sin\varphi d\varphi \\ a\cos\varphi d\varphi \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{dl}_P \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} = \frac{\left[\left(x - a\cos\varphi\right)\left(-a\cos\varphi\right) + a^2\sin^2\varphi\right]}{\left[\left(x - a\cos\varphi\right)^2 + a^2\sin^2\varphi\right]^{\frac{3}{2}}} d\varphi \vec{u}_z$$

$$\vec{dl}_P \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} = \frac{\left(a^2 - xa\cos\varphi\right)}{\left(x^2 + a^2 - 2ax\cos\varphi\right)^{\frac{3}{2}}} d\varphi \vec{u}_z$$

On pose : $u = \dfrac{a}{x}$

$$\vec{dl}_P \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} = \frac{1}{x} \frac{\left(u^2 - u\cos\varphi\right)}{\left(1 + u^2 - 2u\cos\varphi\right)^{\frac{3}{2}}} d\varphi \vec{u}_z$$

On obtient pour B_z l'expression suivante :

$$\boxed{B_z = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{1}{x} \int_0^{2\pi} \frac{\left(u^2 - u\cos\varphi\right)}{\left(1 + u^2 - 2u\cos\varphi\right)^{\frac{3}{2}}} d\varphi}$$

2. Développement limité.

Soit $f\left(u\right)=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\left(u^2-u\cos\varphi\right)}{\left(1+u^2-2u\cos\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}d\varphi$ or $u << 1$ d'où :

$$f\left(u\right)\approx\int\limits_0^{2\pi}\left(u^2-u\cos\varphi\right)\left(1+3u\cos\varphi\right)d\varphi$$

En se limitant aux termes en u^2 on obtient :

$$f\left(u\right)\approx\int\limits_0^{2\pi}\left(u^2-u\cos\varphi-3u^2\cos^2\varphi\right)d\varphi$$

Comme $\int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi=0$ on obtient :

$$f\left(u\right)\approx u^2\int\limits_0^{2\pi}\left(1-3\cos^2\varphi\right)d\varphi=u^2\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\frac{3}{2}\left(1+\cos2\varphi\right)\right)d\varphi$$

$$f\left(u\right)\approx-\pi u^2=-\pi\frac{a^2}{x^2}$$

On obtient ainsi une nouvelle expression du champ magnétique :

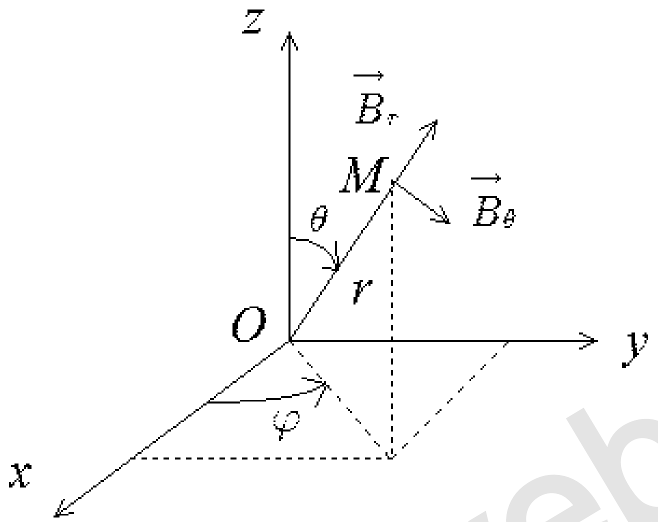
$$B_z=-\frac{\mu_oI}{4\pi}\frac{\pi a^2}{x^3}$$

$$\boxed{B_z=-\frac{\mu_oI}{4\pi}\frac{M}{x^3}}\quad\text{avec } M=\pi a^2$$

Cette expression est celle du champ magnétique créé par un dipôle, orienté suivant *Oz*, en un point *M* de l'axe *Ox* ce qui correspond en coordonnées sphériques à $M\left(r=x,\theta=\frac{\pi}{2},\varphi=0\right)$ et pour lequel $B_\theta=-B_z$.

Champ créé par un dipôle :

$$\vec{B}\left(M\right)\begin{cases}B_r=\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{2M\cos\theta}{r^3}\\B_\theta=\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{M\sin\theta}{r^3}\\B_\varphi=0\end{cases}$$


z
$\overrightarrow{B}_r$
M
$\overrightarrow{B}_\theta$
θ
r
O
y
φ
x