

EM7.3. Détermination d'une distribution de courants.

Énoncé.

Soit l'espace pour lequel on a (en coordonnées cylindriques) :

$$\vec{B} = \vec{0} \text{ pour } r < a \text{ et}$$

$$\vec{B} = \frac{k}{r} \vec{u}_\theta \text{ pour } r > a \text{ avec } k \text{ une constante.}$$

On demande de déterminer les caractéristiques de la distribution de courants qui engendre ce champ magnétique.

E7.3. Détermination d'une distribution de courants.

Corrigé.

Le vecteur densité de courants est *a priori* de la forme :

$$\vec{j} = j_r(r, \theta, z) \vec{u}_r + j_\theta(r, \theta, z) \vec{u}_\theta + j_z(r, \theta, z) \vec{u}_z$$

Comme le champ magnétique est invariant par rotation autour de l'axe Oz et par translation le long de même axe, la distribution de courants ne dépend pas alors des variables θ et z .

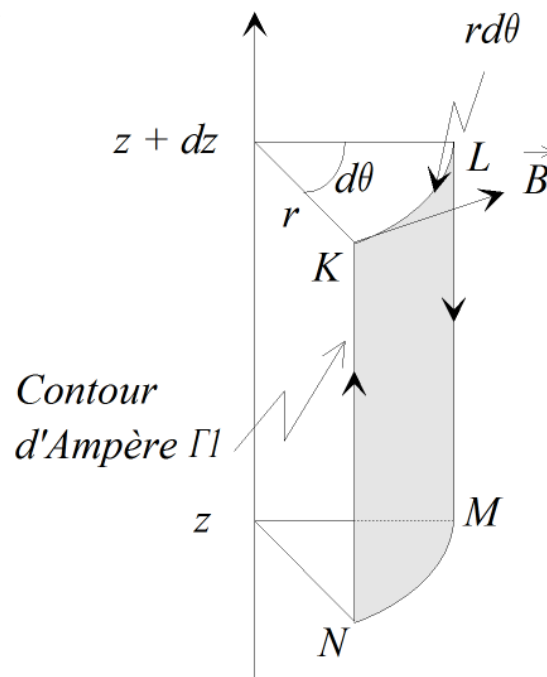
$$\vec{j} = j_r(r) \vec{u}_r + j_\theta(r) \vec{u}_\theta + j_z(r) \vec{u}_z$$

Comme le champ magnétique « tourbillonne » autour de ses sources et qu'il est dans ce problème orthoradial on doit alors avoir :

$$j_r = j_\theta = 0$$

On peut montrer cela en utilisant deux contours d'Ampère élémentaires particuliers :

Contour Γ_1 : Contour fermé $KLMN$ compris entre z et $z + dz$ avec r constant :



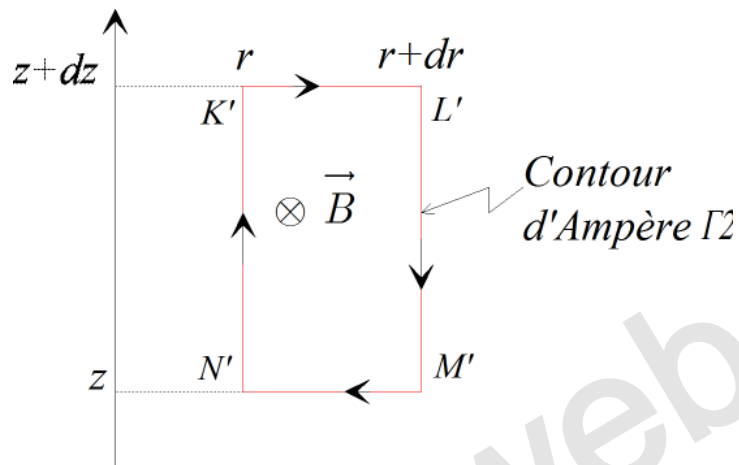
L'application du théorème d'Ampère sur ce contour donne :

$$\oint_{KLMN} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{KL} \frac{k}{r} r d\theta + \int_{LM} 0 - \int_{MN} \frac{k}{r} r d\theta + \int_{NK} 0 = \mu_0 \int \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 j_r r d\theta dz$$

On obtient :

$$\mu_0 j_r r d\theta dz = 0 \quad \rightarrow \quad j_r = 0$$

Contour Γ_2 : Contour fermé rectangulaire contenu dans un plan $\theta = cste$ $K'L'M'N'$ compris entre z et $z + dz$ et r et $r + dr$:



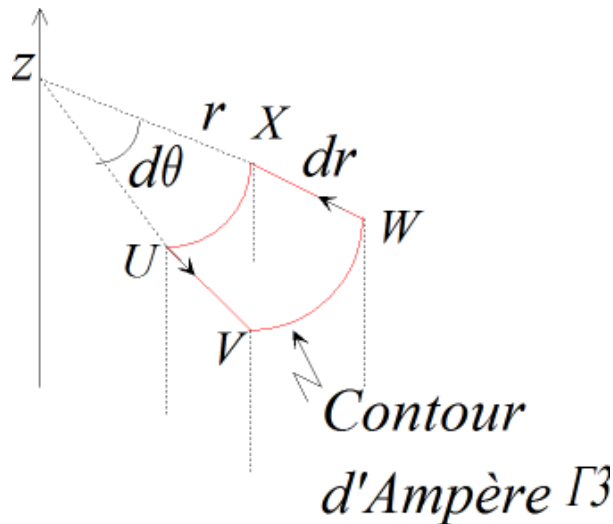
Le théorème d'Ampère s'écrit sur ce nouveau contour fermé :

$$\oint_{K'L'M'N'} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 + 0 + 0 + 0 = \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 j_\theta dr dz$$

On obtient ainsi :

$$\mu_0 j_\theta dr dz = 0 \quad \rightarrow \quad j_\theta = 0$$

Pour déterminer la troisième composante du vecteur densité de courants on utilise de nouveau le théorème sur un **contour** Γ_3 comme l'illustre la figure suivante :



De nouveau le théorème d'Ampère s'écrit sur ce contour fermé :

$$\begin{aligned} \oint_{UVWX} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= 0 + B_{\theta(r+dr)} (r+dr) d\theta + 0 - B_{\theta(r)} r d\theta = \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 j_z r d\theta dr \\ \frac{d(rB_\theta)}{dr} dr d\theta &= \mu_0 j_z r d\theta dr \\ \frac{d(rB_\theta)}{dr} &= \mu_0 j_z r \\ j_z &= \frac{1}{\mu_0 r} \frac{d(rB_\theta)}{dr} \end{aligned}$$

Pour $r < a$ $j_z = 0$ car $B_\theta = 0$

$$\text{Pour } r > a \quad j_z = \frac{1}{\mu_0 r} \frac{d\left(r \frac{k}{r}\right)}{dr} = \frac{1}{\mu_0 r} \frac{d(k)}{dr} = 0 \text{ car } k = \text{constante}$$

Ces trois résultats permettent d'affirmer qu'il n'existe pas de courant volumique.

Le champ magnétique subit une discontinuité de sa composante tangentielle en $r = a$. Les courants sont donc répartis sur la surface cylindrique de rayon $r = a$.

La discontinuité du champ s'écrit :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12} \text{ avec } \vec{n}_{12} \text{ vecteur normal à la distribution surfacique de courant au point considéré.}$$

Dans le cadre de l'exercice on a :

$$\frac{k}{a} \vec{u}_\theta = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_r$$

En multipliant vectoriellement par le vecteur \vec{u}_r on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{k}{a} \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta &= \mu_0 \vec{u}_r \wedge (\vec{j}_s \wedge \vec{u}_r) \\ \frac{k}{a} \vec{u}_z &= \mu_0 \left(\vec{j}_s (\vec{u}_r \cdot \vec{u}_r) - \vec{u}_r (\vec{u}_r \cdot \vec{j}_s) \right) \text{ or } \vec{u}_r \cdot \vec{j}_s = 0 \end{aligned}$$

On peut alors conclure que la distribution surfacique de courants qui engendre ce champ magnétique dans l'espace a pour expression :

$$\boxed{\vec{j}_s = \frac{1}{\mu_0} \frac{k}{a} \vec{u}_z} \text{ et est située en } r = a$$