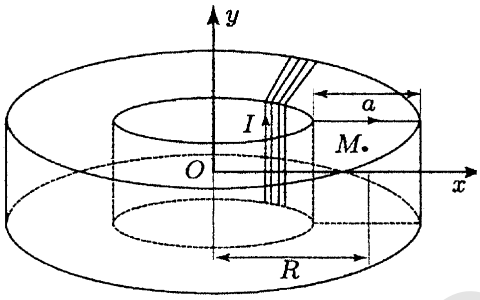
EM7.2. Champ magnétique à l'intérieur d'un tore.

Enoncé.

Une bobine est constituée par un fil conducteur bobiné en spires jointives sur un tore circulaire à section carrée de côté *a* et de rayon moyen *R*.



On désigne par *n* le nombre total de spires et par *I* le courant qui les parcourt.

1. Quelles sont les propriétés de symétrie et d'invariance de cette distribution de courant ? Quelle est la forme des lignes de champ du champ magnétique passant par un point quelconque *M* situé à l'intérieur de la bobine.
2. Déterminer l'expression de la norme du champ magnétique qui règne en un point $M(x, y)$ quelconque du plan *xOy* à l'intérieur du tore.
3. Déterminer l'expression de flux φ du champ magnétique à travers la surface d'une spire dont la normale est orientée dans le sens du champ.
4. On désigne respectivement par *B*max et *B*min les valeurs maximum et minimum du champ magnétique à l'intérieur de la bobine. Calculer la valeur numérique du rapport *a/R* pour une variation relative du champ de 10% : $2\dfrac{B\max - B\min}{B\max + B\min} = 10\%$.

EM7.2. Champ magnétique à l'intérieur d'un tore.
Corrigé.

1. Caractéristiques de la distribution et du champ magnétique.
Le plan contenant le point *M* et l'axe *Oy* est un plan de symétrie de la distribution de courants : le champ magnétique en ce point y est perpendiculaire.
D'autre part la distribution est invariante par rotation autour de l'axe *Oy*.
Ces deux propriétés permettent d'exprimer le vecteur champ magnétique sous la forme :

$\vec{B}(M) = B_\theta(x,y)\vec{u}_\theta$ avec $\vec{u}_\theta$ le vecteur unitaire orthoradial de la base cylindro-polaire.

Les lignes de champ de $\vec{B}$ sont des cercles de centre situés sur l'axe *Oy* contenus dans des plans perpendiculaires à cet axe.

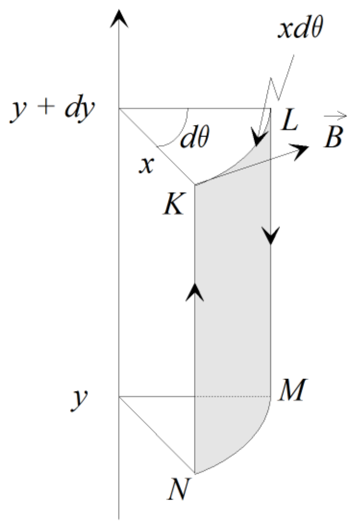
2. Norme du champ magnétique.
Pour déterminer la norme de ce champ magnétique on utilise le théorème d'Ampère en prenant comme contour d'Ampère une ligne de champ passant par le point *M*(*x*, *y*) considéré :

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_o nI \quad \text{avec}$$
$$\oint B_\theta(x,y)\vec{u}_\theta.rd\theta\vec{u}_\theta = \mu_o nI \quad \text{avec } r = x \text{ avec les notations proposées par l'énoncé}$$

Comme le contour choisi est contenu dans un plan *y* = cste, la composante $B_\theta(x,y)$ du champ est constante, on obtient :

$$xB_\theta(x,y)\oint d\theta = \mu_o nI$$
$$2\pi xB_\theta(x,y) = \mu_o nI$$
$$B_\theta(x,y) = \frac{\mu_o nI}{2\pi x}$$

Ce résultat est vrai quelque soit le contour d'Ampère choisi dans un plan *y* = cste, on peut donc en déduire que ce champ ne dépend pas de la coordonnée d'espace *y*.
On peut montrer cela en utilisant un contour d'Ampère élémentaire *KLMN* compris entre *y* et *y* + *dy* comme l'illustre le schéma suivant :



On applique à nouveau le théorème d'Ampère sur ce contour :

$$\oint_{KLMN} \vec{B}.\vec{dl} = \underbrace{B_\theta\left(x, y+dy\right)xd\theta}_{KL} + \underbrace{0}_{LM} - \underbrace{B_\theta\left(x,y\right)xd\theta}_{MN} + \underbrace{0}_{NL}$$

$$\oint_{KLMN} \vec{B}.\vec{dl} = B_\theta\left(x, y+dy\right)xd\theta - B_\theta\left(x,y\right)xd\theta = \frac{\partial B_\theta\left(x,y\right)}{\partial y}dyxd\theta$$

Comme le contour considéré n'enlace aucun courant la circulation du champ est nulle, on obtient alors :

$$\frac{\partial B_\theta\left(x,y\right)}{\partial y} = 0$$

On constate ainsi que le champ magnétique ne dépend pas de *y*. Ainsi :

$$\boxed{\vec{B} = B_\theta\left(x\right)\vec{u_\theta} = \frac{\mu_o nI}{2\pi x}\vec{u_\theta}}$$

3. Flux du champ magnétique.

Le flux φ du champ magnétique est défini par :

$$\varphi = \iint \vec{B}.\vec{dS} = \iint B_\theta\left(x,y\right)\vec{u_\theta}.dxdy\vec{u_\theta}$$

$$\varphi = \iint \frac{\mu_o nI}{2\pi x}dxdy = \int_{R-\frac{a}{2}}^{R+\frac{a}{2}} \frac{\mu_o nI}{2\pi x}dx\int_0^a dy$$

$$\varphi = \frac{\mu_o nIa}{2\pi}\ln\frac{R+\frac{a}{2}}{R-\frac{a}{2}}$$

$$\boxed{\varphi = \frac{\mu_o nIa}{2\pi}\ln\frac{2R+a}{2R-a}}$$

4. Détermination du rapport *a/R*.

Champ maximal : $B_{\max} = \dfrac{\mu_o nI}{2\pi\left(R-\dfrac{a}{2}\right)} = \dfrac{\mu_o nI}{\pi\left(2R-a\right)}$

Champ minimal : $B_{\max} = \dfrac{\mu_o nI}{2\pi\left(R+\dfrac{a}{2}\right)} = \dfrac{\mu_o nI}{\pi\left(2R+a\right)}$

On obtient :

$$2\frac{B\max - B\min}{B\max + B\min} = 2\frac{\dfrac{\mu_o nI}{\pi\left(2R-a\right)} - \dfrac{\mu_o nI}{\pi\left(2R+a\right)}}{\dfrac{\mu_o nI}{\pi\left(2R-a\right)} + \dfrac{\mu_o nI}{\pi\left(2R+a\right)}} = 2\frac{\left(2R+a\right)-\left(2R-a\right)}{\left(2R+a\right)+\left(2R-a\right)} = \frac{a}{R}$$

Le rapport demandé est donc égal à :

$$\boxed{\frac{a}{R} = 0{,}10}$$