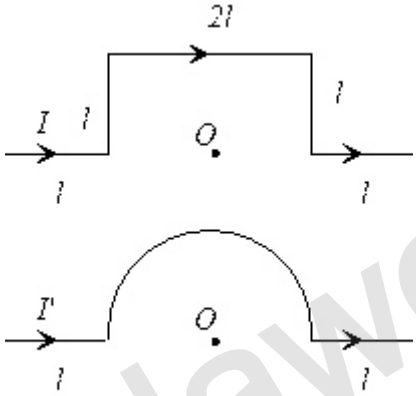
EM6.7. Champ magnétique créé par deux circuits de même longueur.

Enoncé.

On considère un fil conducteur de longueur $6l$. Grâce à ce fil on réalise successivement les deux circuits suivants :



Déterminer le rapport des intensités $\frac{I}{I'}$ pour que le champ magnétique créé au point O soit le même dans les deux cas.

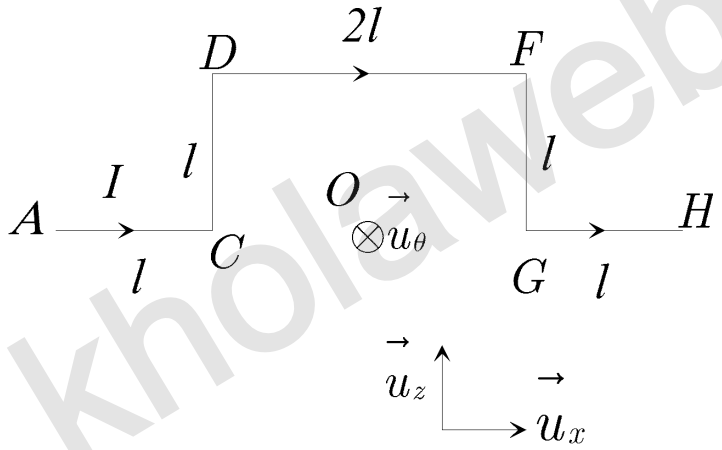
www.kholaweb.com

EM6.7. Champ magnétique créé par deux circuits de même longueur.

Corrigé.

On étudie d'abord <u>le premier</u> circuit proposé.

Le plan de la figure est un plan de symétrie de la distribution des courants, au point O le champ $\vec{B}(O)$ de cette distribution y est donc perpendiculaire. Soit $\vec{u}_\theta$ le vecteur unitaire orthogonal à ce plan et orienté vers l'arrière de la figure $\left(\otimes\vec{u}_\theta\right)$.



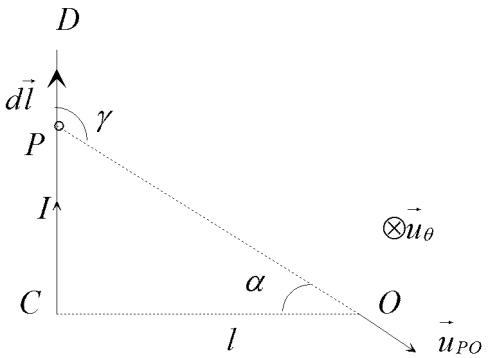
¤ Les parties horizontales AC et GF du circuit créent au point O un champ magnétique nul car en chaque point P de ces portions du circuit, l'élément de longueur $d\vec{l}$ de ces parties et le vecteur $\overrightarrow{PO}$ sont colinéaires.

¤ D'autre part les parties CD et FG créent des champs identiques en ce point O.

En effet pour la partie CD :

$$\vec{B}_{CD}(O) = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int_0^l \frac{d\vec{l}\wedge\vec{u}_{P0}}{PO^2} = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int_0^l \frac{dz\vec{u}_z\wedge\vec{u}_{PO}}{PO^2}$$

$$\vec{B}_{CD}(O) = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int_0^l \frac{dz}{PO^2}\sin\gamma\,\vec{u}_\theta = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int_0^l \frac{dz}{PO^2}\cos\alpha\,\vec{u}_\theta$$



Les variables z, α, PO sont liées. On exprime alors l'intégrale uniquement en fonction de la variable angulaire α . On a :

$$\tan\alpha = \frac{z}{l} \qquad dz = l\frac{1}{\cos^2\alpha}d\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{l}{PO} \qquad \frac{1}{PO^2} = \frac{\cos^2\alpha}{l^2}$$

L'intégration se fera sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ car le triangle OCD est isocèle et rectangle en C.

On obtient en remplaçant :

$$\vec{B}_{CD}(O) = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int_0^{\pi/4}\frac{l\cos\alpha\cos^2\alpha}{l^2\cos^2\alpha}d\alpha\vec{u}_\theta = \frac{\mu_o I}{4\pi l}\int_0^{\pi/4}\cos\alpha d\alpha\vec{u}_\theta$$

$$\vec{B}_{CD}(O) = \frac{\mu_o I}{4\pi l}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin 0\right]\vec{u}_\theta$$

$$\vec{B}_{CD}(O) = \frac{\mu_o I}{4\pi l}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_\theta = \frac{\mu_o I}{4\pi l}\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{u}_\theta$$

Pour la partie FG on a de même :

$$\vec{B}_{FG}(O) = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int_l^0\frac{d\vec{l}\wedge\vec{u}_{P0}}{PO^2} = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int_l^0\frac{dz\vec{u}_z\wedge\vec{u}_{PO}}{PO^2}$$

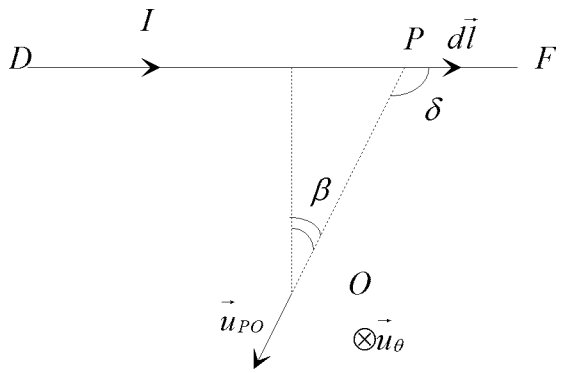
$$\vec{B}_{FG}(O) = -\frac{\mu_o I}{4\pi}\int_l^0\frac{dz}{PO^2}\cos\alpha\vec{u}_\theta = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int_0^l\frac{dz}{PO^2}\cos\alpha\vec{u}_\theta$$

$$\vec{B}_{FG}(O) = \frac{\mu_o I}{4\pi l}\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{u}_\theta$$

¤ Pour la partie DF :

$$\vec{B}_{DF}(O) = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int_{-l}^{l}\frac{d\vec{l}\wedge\vec{u}_{P0}}{PO^2} = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int_{-l}^{l}\frac{dx\vec{u}_x\wedge\vec{u}_{PO}}{PO^2}$$

$$\vec{B}_{DF}(O) = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int_{-l}^{l}\frac{dx}{PO^2}\sin\delta\vec{u}_\theta = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int_{-l}^{l}\frac{dx}{PO^2}\cos\beta\vec{u}_\theta$$



En exprimant les variables x et PO en fonction de la variable angulaire β d'une façon analogue au premier calcul, on obtient :

$$\vec{B}_{DF}(O) = \frac{\mu_o I}{4\pi l}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\beta d\beta\vec{u}_\theta$$

$$\vec{B}_{DF}(O) = \frac{\mu_o I}{4\pi l}\left[\sin\frac{\pi}{4} - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\vec{u}_\theta = \frac{\mu_o I}{4\pi l}\sqrt{2}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{B}_{DF}(O) = \frac{\mu_o I}{2\pi l}\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{u}_\theta$$

www.kholaweb.com

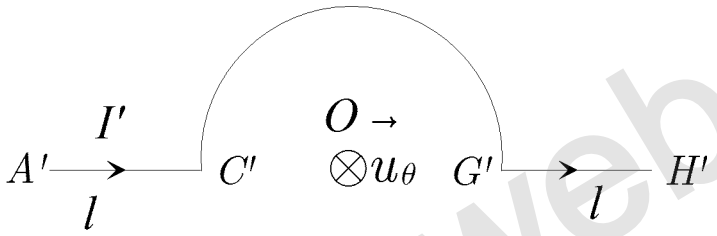
Le principe de superposition permet d'exprimer le champ créé en O :

$$\vec{B}(O)=\vec{B}_{CD}(O)+\vec{B}_{DF}(O)+\vec{B}_{FG}(O)$$

$$\vec{B}(O)=\left(2\frac{\mu_o I}{4\pi l}\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\mu_o I}{2\pi l}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\vec{B}(O)=\frac{\mu_o I}{\pi l}\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{u}_\theta}$$

On étudie maintenant <u>le second</u> circuit.



Les portions $A'C'$ et $G'H'$ créent en O un champ nul.

La demi-spire a un rayon R tel que $\pi R=4l$ d'où : $R=\dfrac{4l}{\pi}$

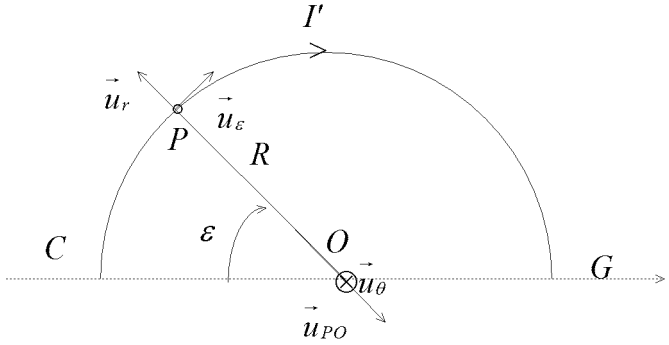
La loi de Biot et Savart permet d'écrire que :

$$\vec{B}'(O)=\vec{B}'_{C'G'}(O)=\frac{\mu_o I'}{4\pi}\int_{1/2\,spire}\frac{d\vec{l}\wedge\vec{u}_{P0}}{PO^2}=\frac{\mu_o I'}{4\pi}\int_{1/2\,spire}\frac{Rd\varepsilon\vec{u}_\varepsilon\wedge\left(-\vec{u}_r\right)}{R^2}$$

$$\vec{B}'(O)=\frac{\mu_o I'}{4\pi R}\int_0^\pi d\varepsilon\vec{u}_\theta$$

$$\vec{B}'(O)=\frac{\mu_o I'}{4R}\vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\vec{B}'(O)=\frac{\mu_o \pi I'}{16l}\vec{u}_\theta}$$



Pour avoir l'égalité des deux champs il faut que l'égalité suivante soit vérifiée :

$$\frac{\mu_o I}{\pi l}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\mu_o \pi I'}{16l}$$

Les courants vérifient alors la relation :

$$\boxed{\frac{I}{I'}=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\sqrt{2}}$$

www.kholaweb.com