EM.6.3. Détermination du champ magnétique au centre d'une sphère bobinée.

Enoncé.

1. Déterminer le champ magnétique crée par une spire circulaire de rayon R parcourue par un courant continu I en un point M de son axe.

On considère une sphère non magnétique, de rayon a, recouverte d'un bobinage serré de spires circulaires parcourues par un même courant d'intensité I. Le bobinage est réparti uniformément sur un axe passant par le centre O de cette sphère. On désigne par n le nombre de spires par unité de longueur de l'axe.

2. Quelles sont les symétries de ce système ? Calculer le champ $\vec{B}$ au centre O de la sphère.

EM.6.3. Détermination du champ magnétique au centre d'une sphère bobinée.

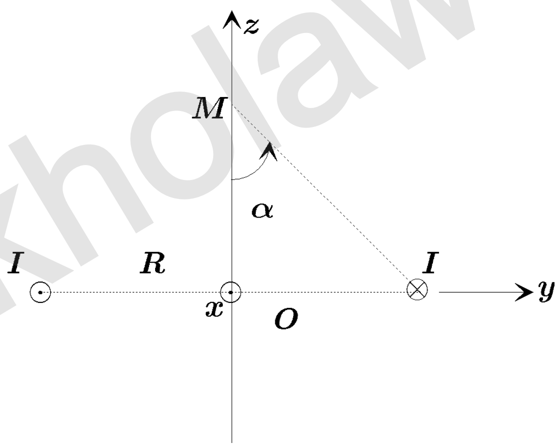
Corrigé.

1. Champ créé par une spire circulaire.

Ceci est une question de cours dont seule la réponse est proposée.

Une bobine de rayon R, de centre O, parcourue par un courant permanent I crée, en un point M de l'axe Oz perpendiculaire à la distribution de courants, un champ magnétique :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_o I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{u}_z$$ avec α angle sous lequel du point M est vu le rayon R de la spire.



2. Champ magnétique au centre de la sphère.

On utilise les coordonnées sphériques (r, θ, φ).

Le champ magnétique en O peut a priori s'écrire sous la forme :

$$\vec{B}(O) = \vec{B}\left(r = 0, \theta = \frac{\pi}{2}, \varphi\right)$$

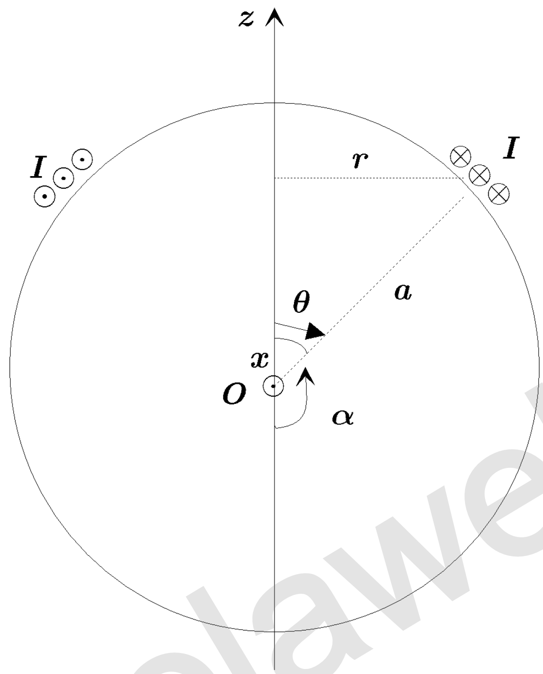
Comme la distribution de courants présente une invariance par rotation autour de l'axe Oz, le champ ne dépend donc pas de la variable angulaire φ.

Le plan équatorial xOy de la sphère est un plan de symétrie, le champ est donc perpendiculaire à ce plan :

$$\vec{B}(O) = B_z \vec{u}_z$$

On peut aussi remarquer que tout plan contenant l'axe Oz constitue un plan d'antisymétrie de cette distribution de courants. La direction du champ magnétique doit appartenir à chacun de ces plans, elle donc confondue avec l'axe Oz ce qui conforte le précédent résultat.

Pour déterminer l'expression du champ magnétique en O on utilise le principe de superposition et l'expression du champ créé par une spire.



Soit une collection élémentaire de $dN = ndz$ spires comprises entre les cotes z et $z + dz$ et de rayon r. Le champ créé par cette distribution élémentaire s'écrit :

$$d\vec{B}(O) = \frac{\mu_o nI}{2r}\sin^3 \alpha dz\vec{u}_z$$

Il est important de noter que $\sin\theta = -\sin\alpha$.

$$d\vec{B}(O) = -\frac{\mu_o nI}{2r}\sin^3 \theta dz\vec{u}_z$$

Pour déterminer le champ résultant on exprime les variables r et z en fonction de θ :

$$\cos\theta = \frac{z}{a} \qquad dz = -a\sin\theta d\theta$$

$$\sin\theta = \frac{r}{a} \qquad r = a\sin\theta$$

On obtient ainsi l'expression du champ élémentaire :

$$d\vec{B}(O) = \frac{\mu_o nI}{2a\sin\theta}\sin^3 \theta a\sin\theta d\theta\vec{u}_z = \frac{\mu_o nI}{2}\sin^3 \theta d\theta\vec{u}_z$$

Le champ résultant s'exprime alors sous la forme :

$$\vec{B}(O) = \int_0^\pi \frac{\mu_o nI}{2}\sin^3 \theta d\theta\vec{u}_z = \frac{\mu_o nI}{2}\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta\vec{u}_z$$

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_o nI}{2}\int_0^\pi \sin\theta\left(1-\cos^2\theta\right)d\theta\vec{u}_z = \frac{\mu_o nI}{2}\left[\int_0^\pi \sin\theta d\theta - \int_0^\pi \sin\theta\cos^2\theta d\theta\right]\vec{u}_z$$

On pose : $u = \cos\theta \qquad \Rightarrow \qquad du = -\sin\theta d\theta$

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_o nI}{2}\left(-\int_1^{-1} du + \int_1^{-1} u^2 du\right)\vec{u}_z$$

$$\vec{B}(O)=\frac{\mu_o nI}{2}\left[-u+\frac{1}{3}u^3\right]_1^{-1}\vec{u}_z=\frac{\mu_o nI}{2}\left(1+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)\vec{u}_z$$

$$\boxed{\vec{B}(O)=\frac{2}{3}\mu_o nI\vec{u}_z}$$