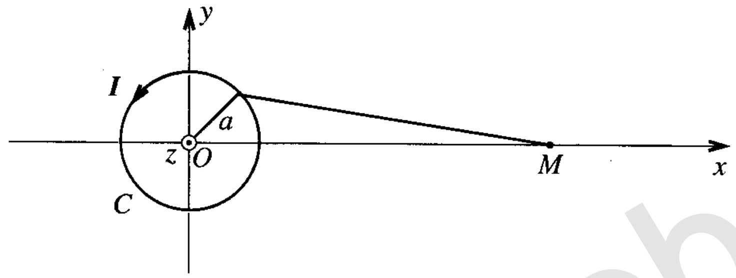
EM6.2. Champ magnétique en un point du plan d'une spire.
Enoncé.



Une spire circulaire de centre O, de rayon a et d'axe (Oz) est parcourue par un courant d'intensité I. Un point courant P de la spire est repéré par l'angle φ que fait le vecteur $\overrightarrow{OP}$ avec l'axe (Ox) de référence.

1. Montrer que la composante Bz du champ magnétique créé en un point M de l'axe (Ox) très éloigné de la spire ($a/x << 1$) s'écrit :

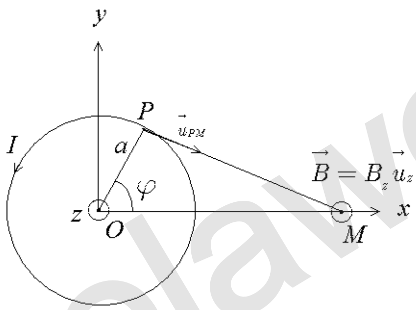
$$Bz = \frac{\mu_o I}{4\pi x}\int_0^{2\pi} \frac{u^2 - u\cos\varphi}{(1-2u\cos\varphi + u^2)^{3/2}}\,d\varphi \quad \text{avec } u = \frac{a}{x}$$

2. Effectuer un développement limité en u de l'intégrale et obtenir la partie principale du champ $\vec{B}(M)$.

EM6.2. Champ magnétique en un point du plan d'une spire.
Corrigé.

1. Expression de la composante B_z du champ magnétique.
Le plan contenant le point *M* et perpendiculaire à l'axe *Oz* est un plan de symétrie de la distribution de courants, le champ magnétique $\vec{B}$ engendré est donc perpendiculaire à ce plan (*Oxy*) en *M*. Soit :

$$\vec{B} = B_z \vec{u}_z$$



On utilise la loi de Biot et Savart :

$$\vec{B}(M) = \oint_C \frac{\mu_o I}{4\pi} \vec{dl}_P \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Or :

$$\overrightarrow{OP}\begin{cases} a\cos\varphi \\ a\sin\varphi \\ 0 \end{cases} \quad \overrightarrow{OM}\begin{cases} x \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad \overrightarrow{PM}\begin{cases} x - a\cos\varphi \\ -a\sin\varphi \\ 0 \end{cases} \quad d\overrightarrow{OP} = \vec{dl}_P \begin{cases} -a\sin\varphi d\varphi \\ a\cos\varphi d\varphi \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{dl}_P \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} = \frac{\left[\left(x - a\cos\varphi\right)\left(-a\cos\varphi\right) + a^2\sin^2\varphi\right]}{\left[\left(x - a\cos\varphi\right)^2 + a^2\sin^2\varphi\right]^{\frac{3}{2}}} d\varphi \vec{u}_z$$

$$\vec{dl}_P \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} = \frac{\left(a^2 - xa\cos\varphi\right)}{\left(x^2 + a^2 - 2ax\cos\varphi\right)^{\frac{3}{2}}} d\varphi \vec{u}_z$$

On pose : $u = \dfrac{a}{x}$

$$\vec{dl}_P \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} = \frac{1}{x} \frac{\left(u^2 - u\cos\varphi\right)}{\left(1 + u^2 - 2u\cos\varphi\right)^{\frac{3}{2}}} d\varphi \vec{u}_z$$

On obtient pour B_z l'expression suivante :

$$\boxed{B_z = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{1}{x} \int_0^{2\pi} \frac{\left(u^2 - u\cos\varphi\right)}{\left(1 + u^2 - 2u\cos\varphi\right)^{\frac{3}{2}}} d\varphi}$$

2. Développement limité.

Soit $f\left(u\right)=\int_0^{2\pi}\frac{\left(u^2-u\cos\varphi\right)}{\left(1+u^2-2u\cos\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}d\varphi$ or *u* << 1 d'où :

$$f\left(u\right)\approx\int_0^{2\pi}\left(u^2-u\cos\varphi\right)\left(1+3u\cos\varphi\right)d\varphi$$

En se limitant aux termes en u^2 on obtient :

$$f\left(u\right)\approx\int_0^{2\pi}\left(u^2-u\cos\varphi-3u^2\cos^2\varphi\right)d\varphi$$

Comme $\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi=0$ on obtient :

$$f\left(u\right)\approx u^2\int_0^{2\pi}\left(1-3\cos^2\varphi\right)d\varphi=u^2\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{3}{2}\left(1+\cos 2\varphi\right)\right)d\varphi$$

$$f\left(u\right)\approx-\pi u^2=-\pi\frac{a^2}{x^2}$$

On obtient ainsi une nouvelle expression du champ magnétique :

$$\boxed{B_z=-\frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{\pi a^2}{x^3}}$$