EM6.1. Champ magnétique créé par une spire carrée.

Enoncé.

On considère une spire carrée, de côté *a*, placée dans le plan *Oxy* et parcourue par un courant d'intensité *I* constant.

1. Montrer que le champ magnétique en un point *M* de l'axe a pour expression :

$$\vec{B} = \frac{\mu_o I}{2\pi} \frac{a^2}{(z^2 + a^2/4)(z^2 + a^2/2)^{1/2}} \vec{e}_z$$

2. Déduire du calcul précédent le champ magnétique créé par une spire polygonale régulière de *N* côtés.

EM6.1. Champ magnétique créé par une spire carrée.

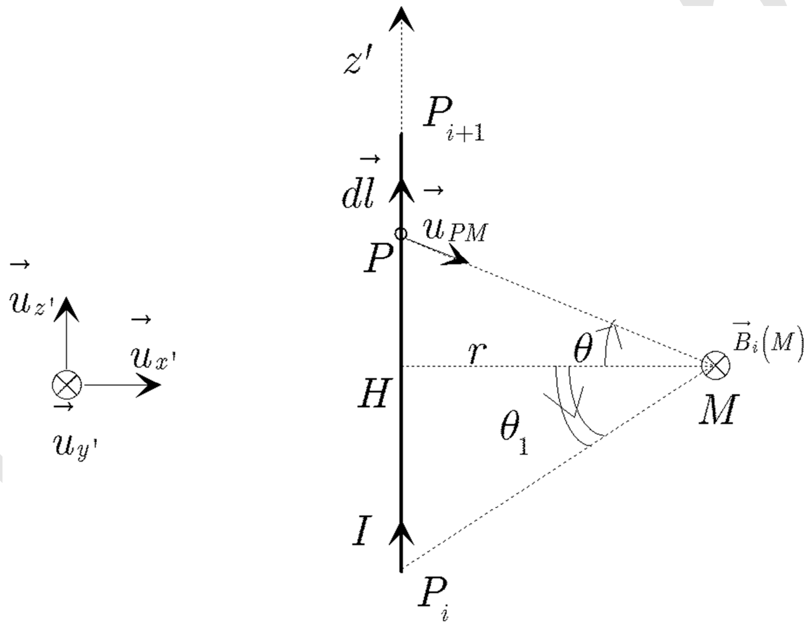
Corrigé.

1. Champ magnétique en point *M* de l'axe.

Le champ magnétique sur l'axe *Oz* d'une spire carrée $P_1P_2P_3P_4$ de côté *a*, placée dans le plan *xOy* est la somme vectorielle des champs $\vec{B}_i$ crées par chaque segment :

$$\vec{B}(M) = \sum_i \vec{B}_i(M)$$

On recherche dans un premier temps le champ magnétique créé par un segment de longueur *a*, en un point *M* de sa médiatrice. On note *H* le projeté de *M* sur le segment, $z' = HP$ et $HM = r$.



$$\vec{B}_i(M) = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int_{P_i}^{P_{i+1}} \frac{\vec{dl}\wedge\vec{u}_{PM}}{PM^2} = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int_{P_i}^{P_{i+1}} \frac{dz'\sin\left(\vec{u}_{z'},\overrightarrow{PM}\right)}{PM^2}\vec{u}_{y'}$$

Pour effectuer ce calcul de l'intégrale, on introduit le paramètre angulaire $\theta = \left(\overrightarrow{MH},\overrightarrow{MP}\right)$ pour exprimer les variables *z* et *PM* et en remarquant que $\sin\left(\vec{u}_{z'},\overrightarrow{PM}\right) = \cos\theta$.

$$\cos\theta = \frac{r}{PM} \qquad \frac{1}{PM^2} = \frac{\cos^2\theta}{r^2}$$

$$\tan\theta = \frac{z'}{r} \qquad dz' = \frac{r}{\cos^2\theta}d\theta$$

On en déduit :

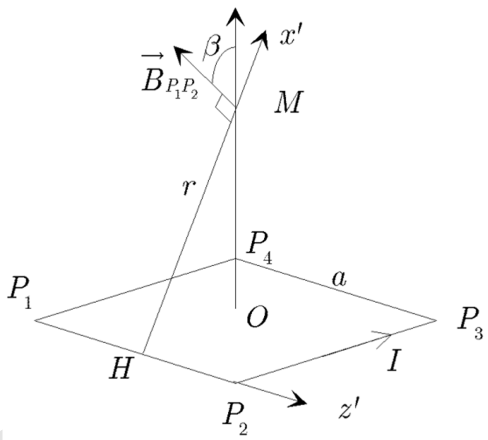
$$\vec{B}_i(M) = \frac{\mu_o I}{4\pi r}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta\, d\theta\, \vec{u}_{y'} = \frac{\mu_o I}{4\pi r}\left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right)\vec{u}_{y'}$$

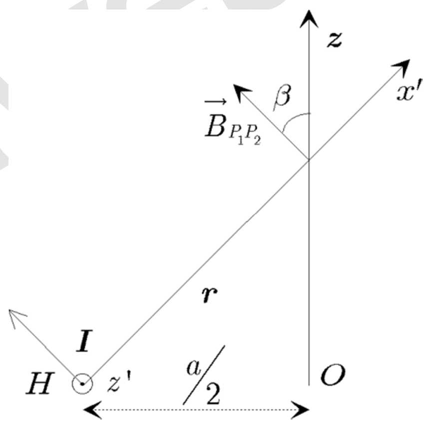
Comme $\theta_1 = -\theta_2$, $\vec{B}_i\left(M\right) = \dfrac{2\mu_o I}{4\pi r}\sin\theta_2 \vec{u}_{y'}$ et que $\sin\theta_2 = \dfrac{\frac{a}{2}}{\left(\left(a/2\right)^2 + r^2\right)^{1/2}}$ on obtient :

$$\vec{B}_i\left(M\right) = \frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{a}{r}\frac{1}{\left(\left(a/2\right)^2 + r^2\right)^{1/2}}\vec{u}_{y'}$$

En *M*, les composantes perpendiculaires à l'axe *Oz* se compensent deux à deux entre segments se faisant face. Par conséquent :

$$\vec{B}\left(M\right) = 4B_{iz}\vec{u}_z = 4B\cos\beta\vec{u}_z$$





Comme $\cos\beta = \dfrac{a}{2r}$ et que $r = \left(\left(a/2\right)^2 + z^2\right)^{1/2}$ le champ magnétique s'exprime alors sous la forme :

$$\vec{B}\left(M\right) = 4\frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{a}{\left(\left(a/2\right)^2 + z^2\right)^{1/2}}\frac{1}{\left(\left(a/2\right)^2 + \left(a/2\right)^2 + z^2\right)^{1/2}}\frac{a}{2\left(\left(a/2\right)^2 + z^2\right)^{1/2}}\vec{u}_z$$

$$\boxed{\vec{B}\left(M\right) = \frac{\mu_o I}{2\pi}\frac{a^2}{\left(\left(a/2\right)^2 + z^2\right)}\frac{1}{\left(a^2/2 + z^2\right)^{1/2}}\vec{u}_z}$$

2. Cas d'une spire polygonale.

Le calcul précédent se généralise au cas d'un polygone régulier de *N* côtés. Le champ magnétique a pour expression :

$$\vec{B}(M) = \sum_{i=1}^{N} \vec{B}_i(M) = N\,\frac{\mu_o I}{2\pi r}\sin\theta_2 \cos\beta\,\vec{u}_z$$

où θ_2 et β ont les mêmes significations que précédemment.