EM5.7. Mouvement d'une particule dans un volume cylindrique chargé.

1. Equation différentielle vérifiée par le vecteur position.

Pour déterminer le mouvement de cette particule il faut dans un premier temps rechercher la force qu'elle subit de la part de la distribution de charge.

On considère un point quelconque M de l'espace. Les propriétés électriques de l'espace en ce point M sont caractérisées par le vecteur $\vec{E}(M)$.

Le plan perpendiculaire à l'axe Oz et contenant le point M considéré est un plan de symétrie de la distribution de charge ainsi que le plan contenant l'axe Oz et passant par ce même M. Le vecteur $\vec{E}(M)$ appartient à ces deux plans et donc à leur intersection, ce champ est donc radial :

$$\vec{E}(M) = E_r(r,\theta,z)\vec{u}_r$$

La distribution de charge est de plus invariante par translation suivant la direction Oz et invariante par rotation autour de cet axe Oz, le champ ne dépend donc pas des coordonnées θ et z.

La distribution de charge crée un champ :

$$\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{u}_r$$

Pour déterminer complètement le champ électrostatique on applique le théorème de Gauss en utilisant une surface cylindrique de rayon $r < R$, de hauteur h, d'axe Oz et fermée par deux bases perpendiculaires à cet axe Oz.

$$\oiint_{Cylindre} \vec{E}.d\vec{S} = \iint_{\text{base en } z} \vec{E}.d\vec{S} + \iint_{\text{base en } z+h} \vec{E}.d\vec{S} + \iint_{\text{surface latérale}} \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_o}$$

$$\oiint_{Cylindre} \vec{E}.d\vec{S} = 0 + 0 + \iint_{\text{surface latérale}} E_r(r) r d\theta dz = E_r(r) r \iint_{\text{surface latérale}} d\theta dz = \frac{\rho\pi r^2 h}{\varepsilon_o}$$

$$E_r(r) 2\pi r h = \frac{\rho\pi r^2 h}{\varepsilon_o}$$

$$E_r(r) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_o}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_o}\vec{u}_r = \frac{\rho \vec{r}}{2\varepsilon_o}$$

Le mouvement de la particule est régi par la seconde loi de Newton dans le référentiel du laboratoire posé galiléen. On néglige l'action de la pesanteur devant celle de la force électrique.

Comme la force électrique et le vecteur vitesse initiale n'ont pas de composantes suivant l'axe Oz, le mouvement de la particule est alors contenu dans un plan perpendiculaire à cet axe Oz.

On écrit le vecteur position de la charge sous la forme : $\vec{r} = r\vec{u}_r$.

La relation de Newton s'écrit alors :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\frac{\rho\vec{r}}{2\varepsilon_o}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{(-q\rho)}{2m\varepsilon_o}\vec{r} = \vec{0} \qquad (1)$$

On exprime l'équation (1) sous la forme suivante :

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \omega^2\vec{r} = \vec{0} \qquad \text{avec } \omega = \sqrt{\frac{(-q\rho)}{2m\varepsilon_o}} \text{ et } q\rho < 0$$

Ce résultat est caractéristique d'un comportement harmonique pour la particule q dans un plan perpendiculaire à l'axe Oz lors de sa présence dans la distribution de charge ρ.

L'intégration de (1) conduit à :

$$\vec{r} = \vec{A}\cos\omega t + \vec{B}\sin\omega t$$

Les conditions initiales portant sur le vecteur $\vec{r}$ s'écrivent :

$$\vec{r}(0) = \vec{A} = R\vec{u}_x$$

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{t=0} = \vec{B}\omega = \vec{v}_o$$

On obtient :

$$\boxed{\vec{r} = R\cos\omega t\vec{u}_x + \frac{v_o}{\omega}\sin\omega t\vec{u}}$$

2. Etude des différents cas.

On introduit maintenant l'angle α que fait le vecteur $\vec{v}_o$ avec le vecteur $(-\vec{u}_x)$.

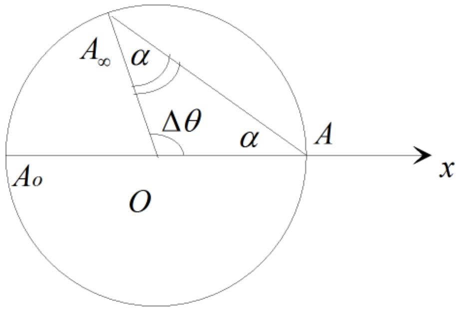
Suivant la valeur de cet angle on peut distinguer les cas suivants :

a) $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Dans la distribution de charge, le mouvement dans le plan xOy est alors une portion d'ellipse dont l'équation paramétrique est :

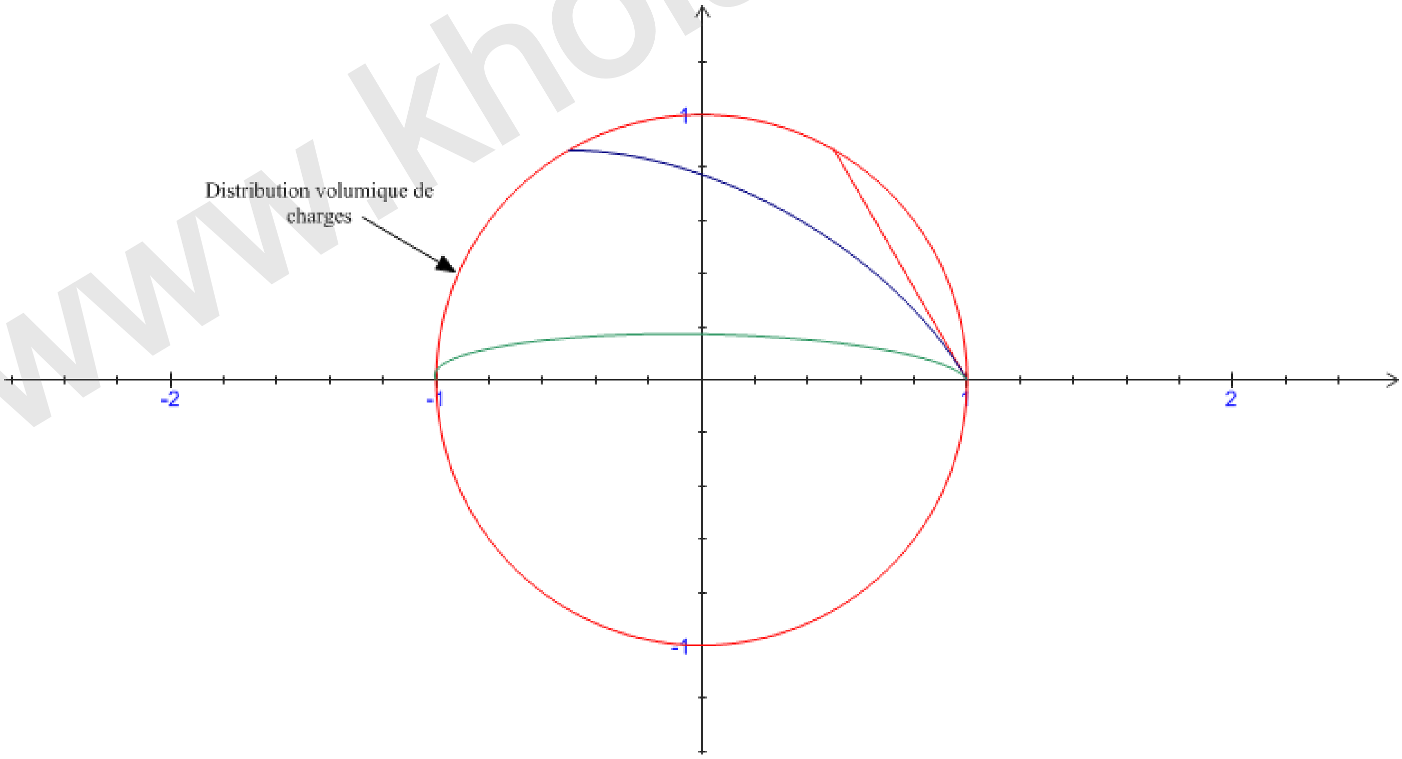
$$\frac{\vec{r}}{R} = \cos\omega t\vec{u}_x + \frac{v_o}{R\omega}\sin\omega t\vec{u} = \left(\cos\omega t - \frac{v_o}{R\omega}\sin\omega t\cos\alpha\right)\vec{u}_x + \frac{v_o}{R\omega}\sin\omega t\sin\alpha\vec{u}_y$$

✓ On peut remarquer que si le terme $\frac{v_o}{R\omega} \to \infty$ le mouvement de la particule est alors un segment de droite AA_∞ tel que la direction du vecteur $\vec{r}$ tourne d'un angle $\Delta\theta = \pi - 2\alpha$.



- ✓ Dans le cas où le terme $\frac{v_{o\perp}}{R\omega} \to 0$, la projection du mouvement de la particule est alors un segment de droite AA_o porté par le vecteur $\vec{u_x}$. La direction du vecteur $\vec{r}$ tourne dans ce cas d'un angle $\Delta\theta = \pi$.
- ✓ Pour $0 < \frac{v_{o\perp}}{R\omega} < \infty$ la direction du vecteur $\vec{r}$ tourne alors d'un angle $\Delta\theta$ tel que $\Delta\theta \in (\pi - 2\alpha, \pi)$, cet angle augmentant avec la valeur du terme $\frac{v_o}{R\omega}$.

On obtient les différentes trajectoires possibles pour la particule suivant la valeur du terme $\frac{v_o}{R\omega}$:



Schémas réalisés en prenant $\alpha = 60°$

b) $\alpha = 0$

La particule décrit alors dans le plan xOy le segment AA_o. Elle perd alors sur le segment OA_o l'énergie cinétique acquise entre A et O. Elle arrive alors en A_o avec la même vitesse v_o qu'elle avait en A.

c) $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Pour cette valeur particulière de l'angle d'entrée de la particule dans ce champ il est intéressant de déterminer une condition pour que la particule décrive un cercle de centre O et de rayon R.

La particule est soumise à une force centrale. Pour avoir un mouvement circulaire (qui sera alors uniforme) la particule doit avoir seulement une composante radiale pour l'accélération. La relation de la dynamique s'écrit alors avec $r = R$:

$-mR^2\dot{\theta} = \frac{q\rho}{2\varepsilon_o}R$ et comme $\dot{\theta} = \frac{v_o}{R}$ dans ce cas on obtient :

$-m\frac{v_o^2}{R} = \frac{q\rho}{2\varepsilon_o}R$ soit :

$\frac{v_o^2}{R^2} = -\frac{q\rho}{2m\varepsilon_o} = \omega^2$ d'où :

$v_o = R\omega = R\sqrt{-\frac{q\rho}{2m\varepsilon_o}}$