EM5.4. Mouvement d'un proton dans un liquide.
On étudie le mouvement horizontal d'un proton dans un liquide sursaturant (des bulles de gaz se créent au passage du proton et matérialisent sa trajectoire).

Un proton de masse *m* et de charge *e*, considéré comme un point matériel, a une vitesse initiale $\vec{v}_o$ en un point fixe *O*; il est dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B}$; le liquide exerce sur ce proton une force de frottement fluide $\vec{f} = -k\vec{v}$ où *k* est une constante positive et $\vec{v}$ est la vitesse du proton à l'instant de date *t*.

Par la suite, on posera : $\omega = \dfrac{eB}{m}$ et $\tau = \dfrac{m}{k}$.

1. Faire le bilan des forces exercées sur le proton se déplaçant dans le liquide (on négligera le poids du proton).
   Etablir l'équation différentielle vectorielle du mouvement du proton.

On désigne par *Oxyz* un trièdre orthogonal direct lié au référentiel galiléen et par $\left(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$ la base de vecteurs unitaires qui lui est associée. On choisit : $\vec{B} = B\vec{e}_z$, $\vec{v}_o = v_o\vec{e}_x$

2. Si la force de frottement était négligeable, quelle serait la variation d'énergie cinétique du proton ?
   Rappeler, avec un minimum de calculs, quelle serait alors la trajectoire du proton (on donnera les caractéristiques de cette trajectoire).
3. Qualitativement, quelles sont les modifications apportées par la force de frottement fluide sur cette trajectoire ?
4. Montrer que l'équation différentielle de la question 1. peut se mettre sous la forme de deux équations différentielles :

$$\frac{dv_x}{dt} = av_y - bv_x \quad (1)$$
$$\frac{dv_y}{dt} = -av_x - bv_y \quad (2)$$

   Déterminer *a* et *b*.

On pose *j* le nombre complexe tel que $j^2 = -1$ pour résoudre le système d'équations différentielles, on introduit le complexe : $\underset{\sim}{V} = v_x + jv_y$.

5. Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes à une équation différentielle dont la solution est :

$$\underset{\sim}{V} = v_o \exp -(b + ja)t$$

   En déduire v_x et v_y.
6. Déduire de $\underset{\sim}{V}$ l'expression de $\underset{\sim}{U} = x(t) + jy(t)$ en fonction de *a*, *b*, v_O et *t*.
7. Déterminer la limite, notée $\underset{\sim}{U}\infty$, de $\underset{\sim}{U}$ lorsque *t* tend vers l'infini.
8. En déduire la position limite $\underset{\sim}{M}_\infty\,(x_\infty, y_\infty)$ en fonction de ω et τ.
9. Donner l'allure de la trajectoire.