EM.5.3. E et B orthogonaux. Cycloïde.

1. Equations différentielles.

On étudie le mouvement de la particule dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Ce système est soumis à l'action de son poids et à la force de Lorentz. On néglige cependant l'effet du poids devant celui de la force électromagnétique. La seconde loi de Newton permet d'écrire que :

$$\vec{F} = m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

L'accélération s'écrit alors :

$$\vec{a}\begin{cases}\ddot{x}\\ \ddot{y} = \dfrac{q}{m}\\ \ddot{z}\end{cases}\left[\vec{E}\begin{cases}0\\ E\\ 0\end{cases} + \vec{v}\begin{cases}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{cases} \wedge \vec{B}\begin{cases}0\\ 0\\ B\end{cases}\right]$$

On obtient le système d'équations différentielles couplées suivant :

$$\begin{cases}\ddot{x} = \omega\dot{y} \quad (1)\\ \ddot{y} = \dfrac{q}{m}E - \omega\dot{x} \quad (2)\\ \ddot{z} = 0 \quad (3)\end{cases} \qquad \text{avec} \quad \omega = \frac{qB}{m}$$

2. Equations paramétriques de la trajectoire

L'équation (3), compte tenu des conditions initiales, donne $z = 0$. Le mouvement s'effectue dans le plan *xOy*.

L'intégration de (1) fournit :

$$\dot{x} = \omega y + \dot{x}(0)$$

Comme la composante initiale de la vitesse suivant *Ox* est nulle on obtient :

$$\dot{x} = \omega y$$

On reporte ce dernier résultat dans l'équation (2) et on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{q}{m}E$$

La solution de cette équation est :

$$y = \frac{q}{m\omega^2}E + C\cos\omega t + D\sin\omega t = R + C\cos\omega t + D\sin\omega t$$

C et *D* sont des constantes d'intégration que l'on détermine à partir des conditions initiales. En effet :

$$y(0) = R + C = 0 \rightarrow C = -R$$

$$\dot{y}(0) = D\omega = 0 \rightarrow D = 0$$

On obtient finalement :

$$\boxed{y = R(1 - \cos\omega t)}$$

Comme $\dot{x} = \omega y$ on a $\dot{x} = R\omega(1 - \cos\omega t)$

L'intégration de cette dernière équation fournit, en tenant compte des conditions initiales :

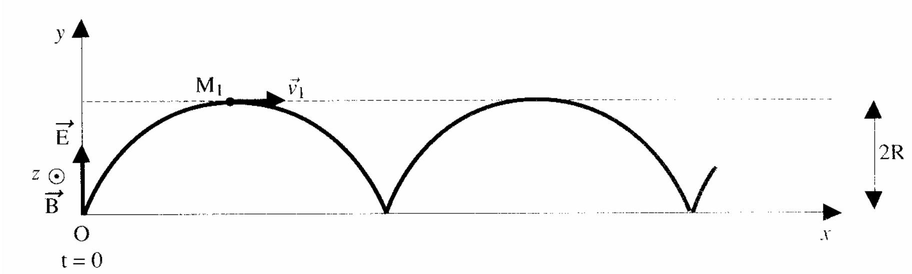
$$\boxed{x = R(\omega t - \sin\omega t)}$$

3. Allure de la trajectoire.

Pour déterminer l'allure de la courbe, on dresse un tableau de valeurs :

ωt	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$3\frac{\pi}{2}$	2π
x	0	$\frac{R}{2}(\pi-2)$	πR	$\frac{R}{2}(3\pi+2)$	$2\pi R$
y	0	R	2R	R	0

On limite l'étude à l'intervalle utilisé compte de la périodicité des fonctions utilisées.



4. Valeur de la vitesse.

La norme du vecteur vitesse a pour expression :

$$v = R\omega\left(2\left(1-\cos\omega t\right)\right)^{\frac{1}{2}} = 2R\omega\sin\frac{\omega t}{2}$$

A la date $t=\frac{\pi}{\omega}$ la vitesse est égale à :

$$\boxed{v = 2R\omega = 2\frac{E}{B}}$$

5. Utilisation du théorème de l'énergie cinétique.

On applique le théorème de l'énergie cinétique entre les dates 0 et $t=\frac{\pi}{\omega}$:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \int_0^{M_1} q(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B}).\vec{dl} = \int_0^{M_1} q\vec{E}.\vec{dl} = \int_0^{M_1} qE.dy$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = qE2R$$

Or :

$$R = \frac{E}{B\omega}$$

$$\omega = \frac{qB}{m} \quad \rightarrow \quad v^2 = 4(\frac{q}{m})E(\frac{Em}{BqB}) = 4\,\frac{E^2}{B^2}\; R = \frac{E}{B\omega}$$

Finalement :

$$\boxed{v = 2\frac{E}{B}}$$