EM. 5.2. Actions d’un champ magnétique et d’une force de frottement.

Enoncé.

Une particule de masse m et de charge $q > 0$ est soumise à l'action d'un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$ uniforme et constant. Elle se déplace dans un liquide et du fait des interactions avec ce liquide subit une force de frottement $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse de la particule par rapport au référentiel du laboratoire. A l'instant $t = 0$, elle se trouve à l'origine du repère $Oxyz$ avec une vitesse $\vec{v}_o = v_o\vec{e}_x$.

1. Déterminer la position M_Ω de la particule lorsque t tend vers l'infini.
   On pose $\tau = m/\lambda$ et $\omega = qB/m$.
2. On repère la particule dans le plan xOy grâce à des coordonnées polaires : la distance $r = M_\Omega M$ et l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{M_\Omega O}, \overrightarrow{M_\Omega M}\right)$ Déterminer l'équation polaire $r(\theta)$ de la trajectoire de la particule. Représenter cette trajectoire.

EM.5.2. Actions d'un champ magnétique et d'une force de frottement.
Corrigé

1. Position *M*Ω.
On étudie la particule *M* dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Elle est soumise à la force magnétique et à la force de frottement. On néglige l'effet de la pesanteur devant ces deux forces. La relation de la dynamique appliquée à la particule permet d'écrire :

$$m\overrightarrow{a} = -\lambda\overrightarrow{v} + q\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B}$$

Comme le mouvement est contenu dans le plan *xOz*, la projection de l'équation vectorielle suivant les vecteurs unitaires de la base du repère (*Oxyz*) donne :

$$m\left|\begin{array}{c}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{array}\right. = -\lambda\left|\begin{array}{c}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{array}\right. + q\left|\begin{array}{c}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{c}0\\ 0\\ B\end{array}\right.$$

On obtient les équations différentielles suivantes :

$$\ddot{x} = -\frac{\dot{x}}{\tau} + \omega\dot{y}$$

$$\ddot{y} = -\frac{\dot{y}}{\tau} - \omega\dot{x}$$

$$\ddot{z} = -\frac{\dot{z}}{\tau}$$

On intègre ces trois équations différentielles en tenant compte des conditions initiales :

$$\dot{x} = -\frac{x}{\tau} + \omega y + v_o$$

$$\dot{y} = -\frac{y}{\tau} - \omega x$$

$$\dot{z} = -\frac{z}{\tau}$$

La résolution de la dernière équation différentielle donne $z = K\exp{-t/\tau} = 0$ en tenant des conditions initiales.

La seule force qui travaille au cours du mouvement de la particule est la force de frottement dont le travail est négatif. L'énergie cinétique de la particule décroît et sa vitesse tend donc vers une valeur nulle. On a donc pour :

$$t \to \infty \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{l}\dot{x}_\infty = 0\\ \dot{y}_\infty = 0\end{array}\right.$$

On obtient :

$$-\frac{x_\infty}{\tau} + \omega y_\infty + v_o = 0$$
$$-\frac{y_\infty}{\tau} - \omega x_\infty = 0$$

En définitive :

$$\overrightarrow{OM_\Omega}\left|\begin{array}{l} x_\infty = \dfrac{\tau v_o}{1+\omega^2\tau^2} \\ y_\infty = \dfrac{-\tau^2\omega v_o}{1+\omega^2\tau^2} \\ z_\infty = 0 \end{array}\right.$$

2. Equation polaire.

En coordonnées polaires :

$$\vec{r} = \overrightarrow{M_\Omega M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_\Omega} = r\vec{e_r}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{M_\Omega M}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

L'intégration de la relation fondamentale de la dynamique donne :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -\frac{\overrightarrow{OM}}{\tau} + \omega\overrightarrow{OM}\wedge\vec{e_z} + \vec{v_o}$$

Pour t infini, cette équation s'écrit :

$$\vec{0} = -\frac{\overrightarrow{OM_\Omega}}{\tau} + \omega\overrightarrow{OM_\Omega}\wedge\vec{e_z} + \vec{v_o}$$

En faisant la différence entre ces deux dernières équations, on obtient :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{\vec{r}}{\tau} + \omega\vec{r}\wedge\vec{e_z}$$

Soit en exprimant le vecteur position :

$$\vec{v} = -\frac{r}{\tau}\vec{e_r} + \omega r\vec{e_\theta}$$

En identifiant terme à terme, on aboutit au système :

$$\begin{cases} \dot{r} = -\dfrac{r}{\tau} \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}$$

Par intégration on obtient :

$$\begin{cases} r = K\exp -\dfrac{t}{\tau} \\ \theta = \omega t \end{cases}$$

On détermine *K* en posant qu'à la date $t = 0$, la particule se trouve à l'origine du repère, c'est à dire par rapport au point *M*Ω aux coordonnées $(-x_\infty, -y_\infty)$. On a donc :

$$r(t=0) = \sqrt{x_\infty^2 + y_\infty^2} = \frac{v_o\tau}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} = K$$

On obtient finalement :

$$\boxed{r = \frac{v_o\tau}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\exp\left(-\frac{\theta}{\omega\tau}\right)}$$

Ce résultat est l'équation polaire d'une spirale logarithmique.