EM.5.1. Actions d'un champ magnétique et d'une force de rappel.

1. Equations différentielles.

On étudie la particule *M* dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Elle est soumise à la force magnétique et à la force de rappel. On néglige l'effet de la pesanteur devant ces deux forces. La relation de la dynamique appliquée à la particule permet d'écrire :

$$m\,\vec{a} = -k\,\vec{OM} + q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Comme le mouvement est contenu dans le plan *xOz*, la projection de l'équation vectorielle suivant les vecteurs unitaires de la base du repère (*Oxyz*) donne :

$$m\left|\begin{array}{c}\ddot{x}\\0\\\ddot{z}\end{array}\right. = -k\left|\begin{array}{c}x\\0\\z\end{array}\right. + q\left|\begin{array}{c}\dot{x}\\0\\\dot{z}\end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{c}0\\B\\0\end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{aligned}\ddot{x} &= -\omega_0^2 x - \frac{qB}{m}\dot{z}\\ \ddot{z} &= -\omega_o^2 z + \frac{qB}{m}\dot{x}\end{aligned}}$$

2. Equation différentielle vérifiée par *u*.

$$u = x + jz \quad\Rightarrow\quad \ddot{u} = \ddot{x} + j\ddot{z} = -\omega_o^2 u + j\frac{qB}{m}\dot{u}$$

$$\boxed{\ddot{u} - j\frac{qB}{m}\dot{u} + \omega_o^2 u = 0}$$

3. Pulsations.

On recherche pour *u* des solutions de la forme exp*st.* En remplaçant dans l'équation différentielle on obtient l'équation caractéristique :

$$s^2 - j\frac{qB}{m}s + \omega_0^2 = 0$$

Le discriminant de l'équation est :

$$\Delta = j^2\left(\frac{q^2B^2}{m^2} + 4\omega_o^2\right) \approx 4j^2\omega_o^2$$

Les solutions de l'équation caractéristique sont :

$$s_{\frac{1}{2}} = j\left(\frac{qB}{2m} \pm \omega_o\right)$$

On obtient pour *u* :

$$u = A\exp j(\omega_o + \frac{qB}{2m})t \;+\; B\exp -j(\omega_o - \frac{qB}{2m})t$$

Il apparaît donc deux pulsations dans le mouvement de *M* :

$$\boxed{\begin{aligned}\omega_1 &= \omega_o + \frac{qB}{2m}\\ \omega_2 &= \omega_o - \frac{qB}{2m}\end{aligned}}$$