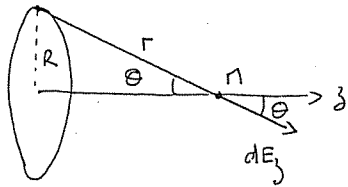


Intersection d'une spirale et d'un dipôle (1/3)

1. Champ créé par le cercle.

Du fait de la symétrie, on peut écrire pour un point P appartenant à l'axe du cercle :

$$\vec{E}(P) = \oint_{\text{cercle}} dE_z(z) \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl \cos\theta}{r^2}$$



$$\text{or } \cos\theta = \frac{z}{r} \quad \text{et } r = (R^2 + z^2)^{1/2}$$

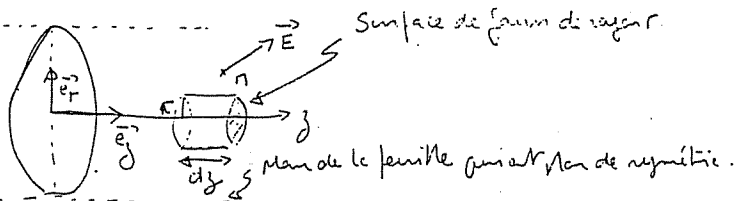
$$\vec{E}(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} z \vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{E}(P) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{Rz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z}$$

On travaille en coordonnées cylindriques.

Pour un point P quelconque de l'espace on peut écrire que

$$\vec{E} = E_r(r, z) \vec{e}_r + E_z(r, z) \vec{e}_z$$



A l'intérieur de la surface de Gauss $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ d'où :

$$\oint_{\text{Surface}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

Intersection d'une spirale et d'un dipôle (2/3)

En ne gardant que les termes les plus simples on a :

$$\pi r^2 E_{z, \text{axe}}(z+dz) - \pi r^2 E_{z, \text{axe}}(z) + 2\pi r dz E_r(z, r) = 0$$

$$\text{On obtient} \quad \frac{dE_{z, \text{axe}}(z, r)}{dz} = -\frac{z}{r} E_r(z, r)$$

En un point P proche de l'axe $E_z(r, z) \approx E_{z, \text{axe}}$ d'où :

$$\vec{E} \approx E_{z, \text{axe}} \vec{e}_z - \frac{r}{z} \frac{dE_{z, \text{axe}}}{dz} \vec{e}_r$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{Rz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z - \frac{r}{z} \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \left(\frac{(R^2 + z^2)^{3/2} - \frac{3}{2} z (R^2 + z^2)^{1/2}}{(R^2 + z^2)^3} \right) \vec{e}_r$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z - \frac{r}{(R^2 + z^2)^{5/2}} (R^2 - z^2) \vec{e}_r \right)$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z - \frac{r}{(R^2 + z^2)^{5/2}} (R^2 - z^2) \vec{e}_r \right)}$$

2. Force

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} = \left(p \sin\alpha \frac{\partial}{\partial r} + p \cos\alpha \frac{\partial}{\partial z} \right) (E_{z, \text{axe}} \vec{e}_z + E_r \vec{e}_r)$$

$$\vec{F} = \underbrace{\left(p \sin\alpha \frac{\partial}{\partial r} E_{z, \text{axe}} + p \cos\alpha \frac{\partial}{\partial z} E_{z, \text{axe}} \right)}_{=0} \vec{e}_z + \left(p \sin\alpha \frac{\partial}{\partial r} E_r + p \cos\alpha \frac{\partial}{\partial z} E_r \right) \vec{e}_r$$

$$\vec{F} = p \cos\alpha \frac{\partial}{\partial z} E_{z, \text{axe}} \vec{e}_z + \left(p \sin\alpha \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{r}{z} \frac{\partial E_{z, \text{axe}}}{\partial z} \right) + p \cos\alpha \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{r}{z} \frac{\partial E_{z, \text{axe}}}{\partial z} \right) \right) \vec{e}_r$$

$$\vec{F} = p \cos\alpha \frac{\partial E_{z, \text{axe}}}{\partial z} \vec{e}_z + \left(-\frac{p \sin\alpha}{z} \frac{\partial E_{z, \text{axe}}}{\partial z} \right) \vec{e}_r$$

Interaction d'une charge et d'un dipôle (3/3)

Si $\vec{p} = q\vec{a}$ on peut calculer le force que subit le dipôle par:
 $\vec{F} = q\vec{a} \cdot (\vec{p} \cdot \vec{E})$

3- Stabilité

Si $\alpha = 0$, $\vec{p} = p\vec{e}_y$ et $\vec{F} = p \frac{\partial}{\partial y} E_y \vec{e}_y$

$$\vec{F} = p \frac{\partial}{\partial y} \frac{R^2 - y^2}{(R^2 + y^2)^{5/2}} \vec{e}_y$$

les positions d'équilibre sont $y = \pm \frac{R}{\sqrt{2}}$ ($\vec{F} = \vec{0}$).

Soit $y = \frac{R}{\sqrt{2}} + \varepsilon$

On obtient

$$m \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = p \frac{\partial}{\partial y} \frac{R^2 - 2\left(\frac{R}{\sqrt{2}} + \varepsilon\right)^2}{\left(R^2 + \left(\frac{R}{\sqrt{2}} + \varepsilon\right)^2\right)^{5/2}}$$

$$m \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = p \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{R^2 - 2\left(\frac{R^2}{2} + 2\varepsilon \frac{R}{\sqrt{2}} + \varepsilon^2\right)}{\left(R^2 + \frac{R^2}{2} + 2\varepsilon \frac{R}{\sqrt{2}} + \varepsilon^2\right)^{5/2}} \right]$$
$$\approx p \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-4\varepsilon \frac{R}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{3}{2}R^2\right)^{5/2}} \right)$$

$$= -\frac{p}{\varepsilon_0 R^3} \frac{8}{9\sqrt{3}} \varepsilon$$

On obtient une équation de la forme

$$m \ddot{\varepsilon} + k\varepsilon = 0$$

La solution de cette équation est oscillatoire : la position $y = \frac{R}{\sqrt{2}}$ est donc une position stable d'équilibre