EM3.9. Sphère creuse.

1. Expression du champ.

Tous les plans contenant le centre *O* de la sphère et le point *M* sont des plans de symétrie de la distribution des charges. Le champ électrique doit simultanément appartenir à l'ensemble de ces plans, il est donc porté par leur intersection qui est la droite *OM*. On obtient :

$$\vec{E}(M) = E_r(r,\theta,\varphi)\vec{u}_r$$

Comme cette distribution présente une invariance par rotation autour du point *O*, le champ électrique ne dépend pas alors des variables angulaires.

$$\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{u}_r$$

Ce résultat ne dépend pas de la position de ce point *M*.

On choisit alors une surface de Gauss centrée en *O* et de rayon *r* >*R*. Le théorème de *Gauss* s'écrit :

$$\oiint \vec{E_I}.dS\vec{u}_r = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_o}$$

$$\oiint E_{I\,r}(r)dS = E_{I\,r}(r)\oiint dS = E_{I\,r}(r)4\pi r^2$$

Pour la charge intérieure :

$$Q_{\text{int}} = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\rho dV = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\rho r^2\sin\theta d\theta d\varphi \overset{\substack{distribution\\uniforme}}{=} \rho\int_{\alpha R}^{R} r^2dr\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi = \rho\frac{4\pi}{3}\left(R^3-\alpha^3R^3\right)$$

Le champ électrique a pour expression dans la région I :

$$\boxed{E_{I\,r}(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\frac{R^3}{r^2}\left(1-\alpha^3\right)}$$

2. Champ dans la région II.

On choisit alors une surface de Gauss centrée en *O* et de rayon *r* tel que $\alpha R < r < R$. Le théorème de *Gauss* s'écrit :

$$\oiint \vec{E_{II}}.dS\vec{u}_r = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_o}$$

$$\oiint E_{II\,r}(r)dS = E_{II\,r}(r)\oiint dS = E_{II\,r}(r)4\pi r^2$$

Pour la charge intérieure :

$$Q_{\text{int}} = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\rho dV = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\rho r^2\sin\theta d\theta d\varphi \overset{\substack{distribution\\uniforme}}{=} \rho\int_{\alpha R}^{r} r^2dr\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi = \rho\frac{4\pi}{3}\left(r^3-\alpha^3R^3\right)$$

Le champ électrique a pour expression dans la région II :

$$\boxed{E_{II\,r}(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\frac{1}{r^2}\left(r^3-\alpha^3R^3\right)}$$

3. Potentiel dans la région I.

Le potentiel *électrostatique* vérifie la relation : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$.

On obtient dans le cadre de cet exercice :

$$E_{Ir} = -\frac{dV_I}{dr} \Rightarrow dV_I = -\frac{\rho}{3\varepsilon_o}\frac{R^3}{r^2}\left(1-\alpha^3\right)dr$$

$$V_I = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(1-\alpha^3\right)\frac{R^3}{r} + Cste$$

Comme $V(\infty) = 0 \;\Rightarrow\; Cste = 0$, on obtient :

$$\boxed{V_I = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(1-\alpha^3\right)\frac{R^3}{r}}$$

4. Potentiel dans la région III.

Dans la région III, qui est vide de charge le champ électrostatique est nul. En effet :

$$\oiint E_{III\,r}(r)\,dS = E_{III\,r}(r)\oiint dS = E_{III\,r}(r)\,4\pi r^2 = 0$$
$$E_{III\,r}(r) = 0$$

La région III est alors un volume équipotentiel :

$$\overrightarrow{grad}V_{III} = \vec{0}$$
$$V_{III} = Cte$$

Pour déterminer cette constante *Cte*, il faut déterminer le potentiel dans la région II et écrire la continuité du potentiel en $r = \alpha R$.

Pour la région II :

$$dV_{II} = -\frac{\rho}{3\varepsilon_o}\frac{1}{r^2}\left(r^3 - \alpha^3 R^3\right)dr$$

$$V_{II} = -\frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{\alpha^3 R^3}{r}\right) + CTE$$

Cette nouvelle constante *CTE* se détermine par continuité du potentiel en $r=R$:

$$V_I(R) = V_{II}(R)$$

$$\frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(1-\alpha^3\right)R^2 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(\frac{R^2}{2} + \alpha^3 R^2\right) + CTE$$

$$\left(1-\alpha^3\right) = -\left(\frac{1}{2} + \alpha^3\right) + \frac{3\varepsilon_o}{\rho R^2}CTE$$

$$\frac{3\varepsilon_o}{\rho R^2}CTE = 1 - \alpha^3 + \frac{1}{2} + \alpha^3 = \frac{3}{2}$$

$$CTE = \frac{1}{2}\frac{\rho R^2}{\varepsilon_o}$$

Le potentiel dans la région III a alors pour expression :

$$V_{III} = V_{II}(\alpha R) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(\frac{\alpha^2 R^2}{2} + \frac{\alpha^3 R^3}{\alpha R}\right) + \frac{1}{2}\frac{\rho R^2}{\varepsilon_o}$$

$$\boxed{V_{III} = \frac{1}{2}\frac{\rho R^2}{\varepsilon_o}\left(1-\alpha^2\right)}$$

5. Charge surfacique.

La couronne sphérique a alors un volume assimilable à la différentielle du volume d'une sphère :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \rightarrow dV = 4\pi R^2 dR$$

Avec $dR = (1-\alpha)R << R$. On obtient ainsi :

$$Q = \rho 4\pi R^2 (1-\alpha) R$$

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{\rho 4\pi R^2 (1-\alpha) R}{4\pi R^2}$$

$$\boxed{\sigma = \rho(1-\alpha)R}$$

6. Différence de potentiel.

Comme l'intérieur de la sphère est un volume équipotentiel et qu'il y a continuité du potentiel à la traversée d'une couche chargée, la différence de potentiel U est nulle.

On peut montrer cela en calculant le potentiel au centre de la sphère et à l'extérieur de la sphère.

Comme la distribution des charges est d'extension spatiale finie on peut appliquer :

$$V_{III}(O) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \iint \frac{\sigma(P)\,dS_P}{PO} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\sigma}{R} \iint dS = \frac{\sigma R}{\varepsilon_o}$$

Pour déterminer le potentiel, on détermine dans un premier temps le champ électrostatique à l'extérieur de la sphère. L'application du théorème de Gauss donne :

$$E_I(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} \frac{R^2}{r^2}$$

De cela on en déduit le potentiel :

$$V_I(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} \frac{R^2}{r}$$

D'où :

$$V_I(R) = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} R$$

On obtient ainsi :

$$\boxed{U = 0}$$