EM3.8. Champ au voisinage de l'axe d'un cerceau uniformément chargé.

Enoncé

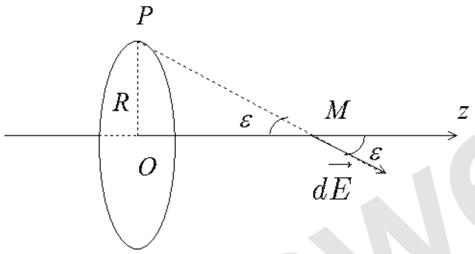
Un cerceau, de rayon *R*, de centre *O*, porte la charge linéique λ uniforme.

1. Déterminer l'expression du champ électrostatique créé par le cerceau en un point *M* de son axe *Oz*.
2. On se propose de calculer maintenant le champ au voisinage de l'axe du cerceau.
   En utilisant une surface de Gauss ayant la forme d'un petit cylindre d'axe *Oz*, de rayon *r* et de longueur *dz* et en posant que $E_z(r,z) \approx E_z(\text{axe})$ pour un point proche de l'axe, montrer que la composante radiale du champ est liée à la valeur du champ sur l'axe par :
   $$E_r(r,z) = -\frac{dE_{z(axe)}}{dz}\frac{r}{2}$$
   Déterminer $\vec{E}$ en un point proche de l'axe.

EM3.8. Champ au voisinage de l'axe d'un cerceau uniformément chargé.
Corrigé.

1. Champ électrostatique en un point de l'axe de l'anneau.
Les plans contenant l'axe *Oz* sont des plans de symétrie de la distribution des charges ; en un point *M* de cet axe, la direction du champ électrostatique doit appartenir à chacun de ces plans donc à leur intersection :

$$\vec{E}\left(M\right) = E_z\left(z\right)\vec{u}_z$$



$$E_z\left(z\right) = \oint_{cerceau} dE_z\left(z\right) \text{ avec } dE_z = d\vec{E}.\vec{u}_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda dl}{PM^2}\vec{u}_{PM}.\vec{u}_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda dl}{PM^2}\cos\varepsilon$$

$$E_z\left(z\right) = \oint_{cerceau} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda dl}{PM^2}\cos\varepsilon = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda}{PM^2}\cos\varepsilon \oint_{cerceau} dl$$

$$E_z\left(z\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda}{PM^2}\cos\varepsilon 2\pi R$$

Or : $\cos\varepsilon = \dfrac{z}{PM}$ et $PM = \left(R^2 + z^2\right)^{1/2}$ d'où :

$$E_z\left(z\right) = \frac{\lambda}{2\varepsilon_o}\frac{Rz}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

Comme le plan contenant le cerceau est lui aussi un plan de symétrie de la distribution des charges on a, en un point *M'* symétrique de *M* par rapport au cerceau :

$$E_z\left(-z\right) = -E_z\left(z\right) = -\frac{\lambda}{2\varepsilon_o}\frac{Rz}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} \text{ avec } z \geq 0$$

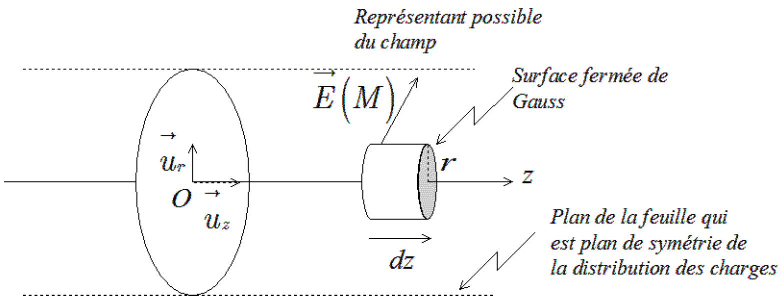
Au final, on obtient pour un point quelconque de l'axe du cerceau :

$$\boxed{\vec{E}\left(z\right) = signe\left(z\right)\frac{\lambda}{2\varepsilon_o}\frac{R\left|z\right|}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}\vec{u}_z}$$

2. Champ en un point proche de l'axe.
On travaille en coordonnées cylindriques.
Pour un point *M* quelconque de l'espace, le plan contenant ce point *M* et l'axe *Oz* est un plan de symétrie de la distribution des charges. Le champ est donc contenu dans ce plan. D'autre part comme il y a invariance de la distribution des charges par rotation autour de l'axe *Oz* on peut alors écrire le champ électrostatique sous la forme :

$$\vec{E} = E_r\left(r,z\right)\vec{u}_r + E_z\left(r,z\right)\vec{u}_z$$

Pour déterminer le champ, on utilise le théorème de Gauss et on choisit comme surface fermée un cylindre de génératrice l'axe *Oz*, de longueur *dz* et de rayon *r*.



A l'intérieur de la surface de Gauss il n'y a pas de charges d'où :

$$\oiint \vec{E}.d\vec{S} = 0$$

Comme le point *M* considéré est très proche de l'axe on fait l'approximation suivante :

$$E_z(r,z) \approx E_{z\ axe} \text{ avec } E_{z\ axe} = E_z(z) = \frac{\lambda}{2\varepsilon_o}\frac{Rz}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}} \text{ pour } z \geq 0$$

D'autre part comme la longueur *dz* du cylindre est élémentaire, on peut considérer que :

$$E_r(r, z+dz) \approx E_r(r,z)$$

On développe l'intégrale double :

$$\oiint \vec{E}.d\vec{S} = \pi r^2 E_{z\ axe}(z+dz) - \pi r^2 E_{z\ axe}(z) + 2\pi r dz E_r(r,z) = 0$$

Après simplifications et en remarquant la présence de la différentielle de la fonction $E_{z\ axe}(z)$ on obtient :

$$\frac{dE_{z\ axe}(z)}{dz} = -\frac{2}{r}E_r(r,z)$$

Pour un point *M* de l'axe on peut maintenant écrire le champ électrostatique sous la forme :

$$\vec{E}(M) = -\frac{r}{2}\frac{dE_{z\ axe}(z)}{dz}\vec{u}_r + E_{z\ axe}(z)\vec{u}_z$$

$$\vec{E}(M) = -\frac{r}{2}\frac{\lambda R}{2\varepsilon_o}\left(\frac{\left(R^2+z^2\right)^{3/2} - \frac{3}{2}z\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}{\left(R^2+z^2\right)^3}\right)\vec{u}_r + \frac{\lambda}{2\varepsilon_o}\frac{Rz}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\vec{u}_z$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_o}\left(-\frac{r}{2}\frac{\left(R^2+z^2-3z^2\right)}{\left(R^2+z^2\right)^{5/2}}\vec{u}_r + \frac{z}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\vec{u}_z\right)$$

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_o}\left(-\frac{r}{2}\frac{\left(R^2-2z^2\right)}{\left(R^2+z^2\right)^{5/2}}\vec{u}_r + \frac{z}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\vec{u}_z\right)}$$