EM3.7. Etude d'une distribution sphérique inhomogène.

1. Expression du champ électrostatique.

Tous les plans contenant le centre *O* de la sphère et le point *P* sont des plans de symétrie de la distribution des charges. Le champ électrique doit simultanément appartenir à l'ensemble de ces plans, il est donc porté par leur intersection qui est la droite *OM.* On obtient :

$$\vec{E}(P) = E_r(r,\theta,\varphi)\vec{u}_r$$

Comme cette distribution présente une invariance par rotation autour du point *O*, le champ électrique ne dépend pas alors des variables angulaires.

$$\vec{E}(P) = E_r(r)\vec{u}_r$$

Ce résultat ne dépend pas de la position de ce point *P*.

On choisit alors une surface de Gauss centrée en *O* et de rayon *r*. Le théorème de *Gauss* s'écrit :

$$\oiint \vec{E}.dS\vec{u}_r = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_o}$$

$$\oiint E_r(r)dS = E_r(r)\oiint dS = E_r(r)4\pi r^2$$

On distingue alors deux régions de l'espace :

● Pour $r \le R$ (on peut mettre ici le signe égal car la distribution est *volumique* ce qui assure la continuité de la composante normale (ici radiale) du champ électrostatique).

Pour la charge intérieure :

$$Q_{\text{int}} = \int_0^r\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \rho dV = \int_0^r\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \rho r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \rho_o\int_o^r\left(1-k\frac{r^2}{R^2}\right)r^2dr\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi$$

$$Q_{\text{int}} = 4\pi\rho_o\left[\int_0^r r^2dr - \int_0^r k\frac{r^3}{R^2}dr\right]$$

$$Q_{\text{int}} = 4\pi\rho_o\left(\frac{r^3}{3} - \frac{k}{5}\frac{r^5}{R^2}\right)$$

On obtient par application du théorème de Gauss :

$$E_r(r)4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho_o}{\varepsilon_o}\left(\frac{r^3}{3} - \frac{k}{5}\frac{r^5}{R^2}\right)$$

Le champ électrique a pour expression dans cette région :

$$\boxed{E_r(r) = \frac{\rho_o}{\varepsilon_o}\left(\frac{r}{3} - \frac{k}{5}\frac{r^3}{R^2}\right)}$$

● Pour $r \ge R$, La charge intérieure à la surface de Gauss s'écrit :

$$Q_{\text{int}} = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \rho dV = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \rho r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \rho_o\int_o^R\left(1-k\frac{r^2}{R^2}\right)r^2dr\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi$$

$$Q_{\text{int}} = 4\pi\rho_o\left[\int_0^R r^2dr - \int_0^r k\frac{r^3}{R^2}dr\right]$$

$$Q_{\text{int}} = 4\pi\rho_o R^3\left(\frac{1}{3} - \frac{k}{5}\right)$$

On obtient par application du théorème de Gauss :

$$E_r(r)4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho_o}{\varepsilon_o} R^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{k}{5}\right)$$

Le champ électrique a pour expression dans cette région :

$$\boxed{E_r(r) = \frac{\rho_o}{\varepsilon_o} \frac{R^3}{r^2} \left(\frac{1}{3} - \frac{k}{5}\right)}$$

2. Maximum du champ.

Le champ a une valeur extrémale que l'on supposera maximale lorsque :

$$\frac{dE_r(r)}{dr} = 0 \text{ avec } E_r(r) = \frac{\rho_o}{\varepsilon_o}\left(\frac{r}{3} - \frac{k}{5}\frac{r^3}{R^2}\right)$$

D'où :

$$\frac{dE_r(r)}{dr} = \frac{\rho_o}{\varepsilon_o}\left(\frac{1}{3} - \frac{3k}{5}\frac{r^2}{R^2}\right) = 0$$

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{5}{9k}$$

$$\boxed{\frac{r}{R} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{k}}}$$

Le coefficient k a pour expression :

$$k = \frac{5}{9}\left(\frac{r}{R}\right)^2$$

Dans le où $\frac{r}{R} = \frac{1}{2}$ on obtient :

$$k = \frac{20}{9} \simeq 2,2$$