EM3.2. Etude d'une distribution cylindrique de charge.

1. Direction du champ.
Les plans, contenant le point M, perpendiculaire et orthogonal à l'axe de la distribution de charges sont des plans de symétrie de cette distribution : le champ électrostatique doit donc avoir sa direction portée par l'intersection de ces deux plans.
Le champ est porté par le vecteur radial de la base cylindro-polaire.

2. Invariances.
La distribution est à symétrie cylindrique, il y a donc invariance par translation parallèlement à l'axe du cylindre et par rotation autour de cet axe.

3. Vecteur champ électrostatique.
Les symétries et invariances permettent d'écrire le vecteur champ électrostatique sous la forme :

$$\vec{E} = E_r(r)\vec{u}_r$$

On prend, dans les deux cas, pour surface de Gauss un cylindre fermé d'axe confondu avec celui de la distribution, de hauteur h, de rayon r.
Comme le vecteur champ et le vecteur $\overrightarrow{dS}$ et que la composante radiale du champ est constante sur la surface latérale du cylindre on peut écrire :

$$\Phi = \oiint_{\substack{surface\\cylindre}} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \oiint_{\substack{surface\\cylindre}} E_r.dS = \iint_{\substack{surface\\latérale\\cylindre}} E_r.dS = E_r \iint_{\substack{surface\\latérale\\cylindre}} dS = E_r.2\pi rh = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_o}$$

A l'extérieur de la distribution :

$$Q_{\text{int}} = \pi R^2 h\rho$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\varepsilon_o}\frac{R^2}{r}\vec{u}_r$$

A l'intérieur de la distribution:

$$Q_{\text{int}} = \pi r^2 h\rho$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\varepsilon_o} r\vec{u}_r$$

4. Potentiel.
Comme le vecteur champ électrostatique est l'opposé du gradient du potentiel V et qu'il ne dépend que r (la distribution étant à symétrie cylindrique) on obtient :

$$\vec{E} = E_r(r)\vec{u}_r = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r$$

On obtient par intégration le potentiel V. Les constantes d'intégration sont obtenues par la condition de potentiel nul en $r = 0$ et par la continuité du potentiel en $r = R$.
A l'intérieur de la distribution:

$$V = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_o}$$

A l'extérieur de la distribution:

$$V = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\ln\frac{R}{r} - \frac{\rho R^2}{4\varepsilon_o}$$

5. Champ à l'intérieur.

Les propriétés de symétrie et d'invariance ne sont pas modifiées. En considérant une surface de Gauss identique à celle décrite en 3 et en prenant en compte la dépendance radiale de la distribution dans le calcul de la charge intérieure à cette surface de Gauss, on trouve:

$$Q_{\text{int}} = \iiint \rho d\tau = \iiint \rho_o \frac{r}{R} r d\theta dr dz$$

$$Q_{\text{int}} = \rho_o \frac{h}{R} 2\pi \frac{r^3}{3}$$

D'où :

$$E_r = \frac{\rho_o}{3\varepsilon_o}\frac{r^2}{R}$$