EM3.1. Atome d'hydrogène.

Enoncé.

On considère une distribution de charge à symétrie sphérique de centre *O*. Le potentiel en un point *M* de l'espace est :

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r}\exp(-\frac{r}{a}) \text{ avec } OM = r.$$

1. Déterminer le champ électrostatique en ce point *M*.
2. Calculer le flux du champ à travers une sphère de centre *O* et de rayon *r*. Faire tendre successivement *r* vers 0, puis vers $+\infty$. Conclure.
3. Déterminer la densité volumique de charge ρ.
4. Etudier la fonction $z(r) = 4\pi r^2 \rho(r)$. Que représente cette fonction?
5. La distribution étudiée est en fait un atome d'hydrogène. Discuter.

EM3.1. Atome d'hydrogène.
Corrigé.

1. Champ électrostatique.
Comme le vecteur champ électrostatique est l'opposé du gradient du potentiel *V* et qu'il ne dépend que *r* (la distribution étant à symétrie sphérique) on obtient :

$$\vec{E} = E_r(r)\vec{u_r} = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{dV}{dr}\vec{u_r}$$

$$E_r = -\frac{dV}{dr} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r^2}\left(1+\frac{r}{a}\right)\exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

2. Flux du champ.
Le flux du champ électrostatique est défini par :

$$\phi = \oiint \vec{E}.d\vec{S}$$

Comme la composante du champ est radiale et constante sur une sphère de rayon *r* :

$$\Phi = 4\pi r^2 E_r = \frac{q}{\varepsilon_o}(1+\frac{r}{a})exp - \frac{r}{a}$$

L'étude des limites donne :

$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_o}$ pour *r* tendant vers 0

$\Phi = 0$ pour *r* tendant vers l'infini.

D'après le théorème de Gauss, la charge intérieure à une sphère de rayon *r* à pour expression :

$Q(r) = \varepsilon_o \phi$.

On peut donc conclure que la charge totale de la distribution est nulle et qu'au point *O* on a une charge ponctuelle positive *q*.

3. Densité volumique de charge.
La charge contenue entre les sphères de centre O et de rayon *r* et *r* + d*r* est:

$$dq = 4\pi r^2 \rho(r) dr$$

On obtient alors :

$$\rho(r) = \frac{\varepsilon_o}{4\pi r^2}\frac{d\phi}{dr} = -\frac{q}{4\pi r a^2} exp - \frac{r}{a}$$

Cette densité de charges est négative et a une charge totale -*q*.

4. Fonction
La fonction étudiée est la densité radiale de charges et passe par un extremum en *r* = *a*.

5. Atome d'hydrogène.
La distance *a* est le rayon de Bohr qui est la distance au noyau pour laquelle la probabilité de présence de l'électron est maximale.