EM2.1. Potentiel et champ créés par un disque en un point de son axe de révolution.

1. Potentiel en un point *M* de l'axe.
On considère un élément de surface de la surface du disque centré en un point *P*. Le potentiel électrostatique créé en un point *M* de l'axe *Oz* a pour expression :

$$\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma \mathrm{d}S}{PM} = \frac{\sigma_o}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{r}\frac{r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r}{\left(r^2+z^2\right)^{1/2}}$$

Comme les variables r et θ sont séparées l'intégrale s'écrit :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma \mathrm{d}S}{PM} = \frac{\sigma_o a}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{d}r}{\left(r^2+z^2\right)^{1/2}} + Cte$$

$$V = \frac{\sigma_o a}{2\varepsilon_0}\int_0^{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{d}r}{\left(r^2+z^2\right)^{1/2}} + Cte$$

Pour le calcul on effectue le changement de variable suivant :

$$r = z\mathrm{sh}u \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}r = z\mathrm{ch}u\mathrm{d}u$$

Pour :

$$r = 0 \quad \rightarrow \quad \mathrm{sh}u = 0 \quad \rightarrow \quad u = 0$$

$$r = R \quad \rightarrow \quad \mathrm{sh}u = \frac{R}{z} \quad \rightarrow \quad u = \arg\ \mathrm{sh}\frac{R}{z}$$

D'autre part :

$$\left(r^2+z^2\right)^{1/2} = z\left(\mathrm{sh}^2u+1\right)^{1/2} = z\mathrm{ch}u$$

On obtient :

$$V = \frac{\sigma_o a}{2\varepsilon_0}\int_0^{\arg\ \mathrm{sh}\frac{R}{z}}\mathrm{d}u + Cte$$

$$V = \frac{\sigma_o a}{2\varepsilon_0}\arg\ \mathrm{sh}\frac{R}{z} + Cte$$

En prenant le potentiel nul à l'infini on obtient :

$$V = \frac{\sigma_o a}{2\varepsilon_0}\arg\ \mathrm{sh}\frac{R}{z}$$

2. Champ en un point *M* de l'axe.

L'axe *Oz* est axe de symétrie de la distribution de charges. Le champ en un point *M* de cet axe est donc porté par cet axe :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$$

$$E_z = -\frac{\mathrm{d}\dfrac{\sigma_o a}{2\varepsilon_0}\arg\ \mathrm{sh}\dfrac{R}{z}}{\mathrm{dz}} = -\frac{\sigma_o a}{2\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}\arg\ \mathrm{sh}\dfrac{R}{z}}{\mathrm{dz}}$$

On doit donc calculer la dérivée de la fonction $y = \arg\mathrm{sh}x$.

On a : $x = \mathrm{sh}\,y$ d'où $x' = \dfrac{dx}{dy} = \ \mathrm{ch}y$

Comme $y' = \dfrac{1}{x'} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}\,y} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\ \mathrm{sh}^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\ x^2}}$

$$E_z = -\frac{\sigma_o a}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{R^2}{z^2}}}\left(-\frac{R}{z^2}\right)$$

$$E_z = \frac{\sigma_o Ra}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{z^4 + R^2 z^2}}$$

$$\boxed{E_z = \frac{\sigma_o a}{2\varepsilon_0}\frac{1}{z}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{z^2}{R^2}}}}$$