EM1.7. Champ électrique sur l'axe d'un système (-*q*, +*q*).

1. Champ électrique en un point de l'axe *x'Ox*.

Le plan perpendiculaire (P) à l'axe *x'Ox* et passant par le point *O* est un plan d'antisymétrie de la distribution des deux charges. On a donc en un point *M'* appartenant à l'axe *x'Ox* et symétrique d'un point *M* de ce même axe par rapport au plan (P) :

$$\vec{E}(M') = -Sym_{(P)}\left(\vec{E}(M)\right)$$

$$E_x(-x) = E_x(x)$$

On étudie alors les propriétés de cette distribution en un point $M \in [0, +\infty[$.

On exprime le champ créé par les charges en un point *M* de l'axe *x'Ox* :

$$\vec{E}_A(M) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{AM^2}\vec{u}_{AM}$$

$$\vec{E}_B(M) = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{BM^2}\vec{u}_{BM}$$

Le principe de superposition permet d'écrire le champ résultant au point *M* :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{BM^2}\vec{u}_{BM} - \frac{1}{AM^2}\vec{u}_{AM}\right)$$

Pour $x > a$: $\vec{u}_{AM} = \vec{u}_{BM} = \vec{u}_x$

$$E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{(x-a+x-a)(x+a-x+a)}{(x-a)^2(x+a)^2}\right)$$

$$E_x = \frac{qax}{\pi\varepsilon_o\left(x^2-a^2\right)^2}$$

$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{qa}{\pi\varepsilon_o}\left(\frac{\left(x^2-a^2\right)^2 - 2x\left(x^2-a^2\right)2x}{\left(x^2-a^2\right)^4}\right)$$

$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{qa}{\pi\varepsilon_o}\frac{\left(x^2-a^2\right)-4x^2}{\left(x^2-a^2\right)^3} = -\frac{qa}{\pi\varepsilon_o}\frac{3x^2+a^2}{\left(x^2-a^2\right)^3} < 0$$

E_x est une fonction décroissante pour $x > a$

Pour $0 \le x < a$: $\vec{u}_{AM} = -\vec{u}_{BM} = \vec{u}_x$

$$E_x = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(x+a)^2}\right) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{\left(x^2+2ax+a^2\right)+\left(x^2-2ax+a^2\right)}{(x-a)^2(x+a)^2}\right)$$

$$E_x = -\frac{q\left(x^2+a^2\right)}{2\pi\varepsilon_o\left(x^2-a^2\right)^2}$$

$$\frac{dE_x}{dx}=-\frac{q}{2\pi\varepsilon_o}\left(\frac{2x\left(x^2-a^2\right)^2-\left(x^2+a^2\right)2\left(x^2-a^2\right)2x}{\left(x^2-a^2\right)^4}\right)=-\frac{q}{2\pi\varepsilon_o}2x\left(\frac{\left(x^2-a^2\right)^2-2\left(x^2+a^2\right)\left(x^2-a^2\right)}{\left(x^2-a^2\right)^4}\right)$$

$$\frac{dE_x}{dx}=-\frac{q}{2\pi\varepsilon_o}2x\left(\frac{\left(x^2-a^2\right)^2-2\left(x^4-a^4\right)}{\left(x^2-a^2\right)^4}\right)=-\frac{q}{\pi\varepsilon_o}x\left(\frac{x^4-2a^2x^2+a^4-2x^4+2a^4}{\left(x^2-a^2\right)^4}\right)$$

$$\frac{dE_x}{dx}=-\frac{q}{\pi\varepsilon_o}x\left(\frac{-x^4-2a^2x^2+3a^4}{\left(x^2-a^2\right)^4}\right)=-\frac{q}{\pi\varepsilon_o}x\left(\frac{4a^4-\left(x^2-a^2\right)^2}{\left(x^2-a^2\right)^4}\right)<0$$

E_x est une fonction décroissante pour $0 \le x < a$

Pour $x = 0$ on a : $\frac{dE_x}{dx}=0$ la fonction passe un extremum $E_x\left(0\right)=-\frac{q}{2\pi\varepsilon_o}\frac{1}{a^2}$

2. Représentation graphique.