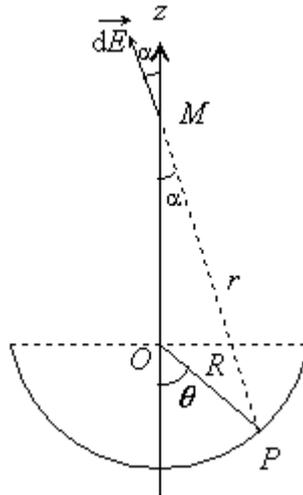


EM1.6. Champ créé par une demi-sphère en un point de son axe.

L'axe Oz est axe de symétrie de la distribution des charges. Le champ en M est donc porté par cet axe.

On considère un élément de surface de la demi-sphère centré en un point P .



Le champ électrostatique élémentaire créé par cet élément au point M de l'axe Oz a pour expression :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma R^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{r^2} \vec{u}_{PM}$$

Seule la projection de ce vecteur sur l'axe Oz contribue au champ au point M :

$$dE_z = d\vec{E} \cdot \vec{u}_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma R^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{r^2} \vec{u}_{PM} \cdot \vec{u}_z$$

$$\text{Or : } r^2 = R^2 \sin^2\theta + (z + R \cos\theta)^2 \text{ et } \vec{u}_{PM} \cdot \vec{u}_z = \cos\alpha = \frac{z + R \cos\theta}{r}$$

D'où :

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma R^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{(R^2 \sin^2\theta + (z + R \cos\theta)^2)^{3/2}}$$

Par intégration :

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma R^2 \sin\theta (z + R \cos\theta) d\theta}{(R^2 \sin^2\theta + (z + R \cos\theta)^2)^{3/2}}$$

$$E_z = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta (z + R \cos\theta) d\theta}{(R^2 + z^2 + 2zR \cos\theta)^{3/2}}$$

$$E_z = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \left(\int_0^{\pi/2} \frac{z \sin\theta d\theta}{(R^2 + z^2 + 2zR \cos\theta)^{3/2}} + \int_0^{\pi/2} \frac{R \sin\theta \cos\theta d\theta}{(R^2 + z^2 + 2zR \cos\theta)^{3/2}} \right)$$

Or :

$$d(R^2 + 2zR \cos \theta + z^2)^{-1/2} = \frac{1}{2} \frac{1}{(R^2 + 2zR \cos \theta + z^2)^{3/2}} 2zR \sin \theta d\theta$$

$$d(R^2 + 2zR \cos \theta + z^2)^{-1/2} = zR \frac{\sin \theta d\theta}{(R^2 + 2zR \cos \theta + z^2)^{3/2}}$$

Soit :

$$E_z = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_o} \left(\int_0^{\pi/2} \frac{d(R^2 + 2zR \cos \theta + z^2)^{-1/2}}{R} + \int_0^{\pi/2} \frac{d(R^2 + 2zR \cos \theta + z^2)^{-1/2}}{z} \cos \theta \right)$$

Posons :

$$X = (R^2 + 2zR \cos \theta + z^2)^{-1/2} \rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2zR} \left(\frac{1}{X^2} - z^2 - R^2 \right)$$

Pour :

$$\text{pour } \theta = 0 \quad X = \frac{1}{R+z}$$

$$\text{pour } \theta = \pi/2 \quad X = \frac{1}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$E_z = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_o} \left(\int_0^{\pi/2} \frac{d(R^2 + 2zR \cos \theta + z^2)^{-1/2}}{R} + \int_{X=\frac{1}{R+z}}^{X=\frac{1}{(R^2+z^2)^{1/2}}} \frac{1}{2z^2 R} \left(\frac{1}{X^2} - z^2 - R^2 \right) dX \right)$$

$$E_z = \frac{\sigma R}{2\epsilon_o} \left(\frac{1}{(R^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{1}{R+z} \right) + \frac{\sigma R}{4\epsilon_o z^2} \int_{X=\frac{1}{R+z}}^{X=\frac{1}{(R^2+z^2)^{1/2}}} \left(\frac{1}{X^2} - z^2 - R^2 \right) dX$$

$$E_z = \frac{\sigma R}{2\epsilon_o} \left(\frac{1}{(R^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{1}{R+z} \right) - \frac{\sigma R}{4\epsilon_o z^2} \left[\frac{1}{X} + (z^2 + R^2) X \right]_{X=\frac{1}{R+z}}^{X=\frac{1}{(R^2+z^2)^{1/2}}}$$

$$E_z = \frac{\sigma R}{2\epsilon_o} \left(\frac{1}{(R^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{1}{R+z} \right) - \frac{\sigma R}{4\epsilon_o z^2} \left((R^2 + z^2)^{1/2} + \frac{(R^2 + z^2)}{(R^2 + z^2)^{1/2}} - (R+z) - \frac{R^2 + z^2}{R+z} \right)$$

$$E_z = \frac{\sigma R}{2\epsilon_o} \left(\frac{1}{(R^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{1}{R+z} \right) - \frac{\sigma R}{4\epsilon_o z^2} \left(2(R^2 + z^2)^{1/2} - 2 \frac{R^2 + z^2 + zR}{R+z} \right)$$

$$E_z = \frac{\sigma R}{2\epsilon_o} \left(\frac{1}{(R^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{1}{R+z} - \frac{(R^2 + z^2)^{1/2}}{z^2} + \frac{R^2 + z^2 + zR}{z^2 (R+z)} \right)$$

$$E_z = \frac{\sigma R}{2\epsilon_o} \left(\frac{1}{(R^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{(R^2 + z^2)^{1/2}}{z^2} + \frac{1}{R+z} \left(\frac{R^2 + z^2 + zR}{z^2} - 1 \right) \right)$$

$$E_z = \frac{\sigma R}{2\epsilon_o} \left(\frac{R}{z^2} + \frac{1}{(R^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{(R^2 + z^2)^{1/2}}{z^2} \right)$$