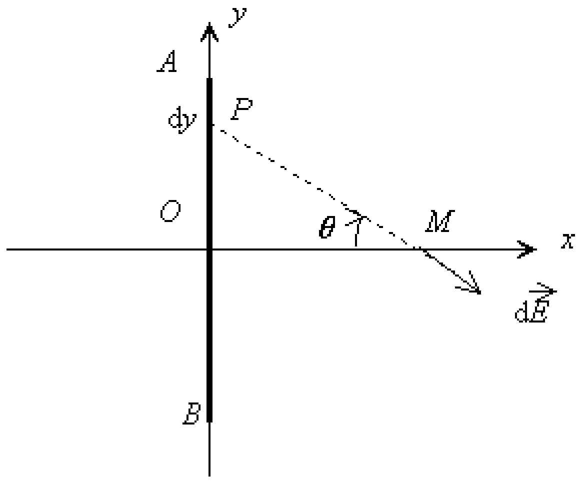
EM.1.5. Champ créé par un segment chargé.

1. Champ en un point de l’axe de symétrie.



Tous les plans passant par *OM* sont des plans de symétrie de la distribution de charge, le champ électrostatique est donc porté par l’axe *Ox*.

Soit $\mathrm{d}\vec{E}$ le champ créé en *M* par un élément de fil d*y* centré autour du point *P* :

$$\mathrm{d}\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{PM^2}\vec{u}_{PM} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}y}{PM^2}\vec{u}_{PM}$$

$$\mathrm{d}E_x = \mathrm{d}\vec{E}(M).\vec{u}_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}y}{PM^2}\vec{u}_{PM}.\vec{u}_x$$

$$\mathrm{d}E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}y}{PM^2}\cos\theta$$

On exprime les variables *PM*, *y* en fonction de *θ*.

$$PM = \frac{x}{\cos\theta}\;;\; y = x\tan\theta \rightarrow \mathrm{d}y = x\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}$$

En remplaçant on obtient :

$$E_x = \int_{-a}^{+a}\mathrm{d}E_x = 2\int_0^{\theta_{\max}}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}\frac{\cos^2\theta}{x^2}\cos\theta$$

$$E_x = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\int_0^{\theta_{\max}}\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$E_x = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\sin\theta_{\max}$$

On exprime l’angle :

$$\sin\theta_{\max} = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

Finalement :

$$\boxed{E_x = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}}$$

2. Cas du fil infini.

Dans le cas d'un fil infini on a : $a \to \infty$ d'où $\frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} \to 1$

On obtient :

$$\boxed{E_x = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}}$$