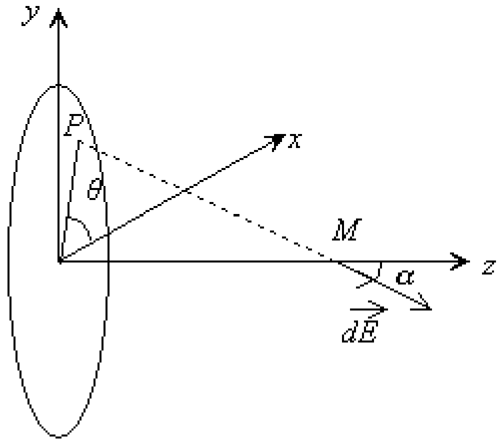
EM1.4. Champ créé par un disque en un point de son axe.



L'axe Oz est axe de symétrie de la distribution des charges. Le champ en M est donc porté par cet axe.
On considère un élément de surface du disque centré en un point P. Le champ électrostatique créé par cet élément en un point M de l'axe Oz a pour expression :

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\sigma \mathrm{d}S}{PM^2}\vec{u}_{PM} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\sigma r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r}{r^2+z^2}\vec{u}_{PM}$$

Seule la projection de ce vecteur sur l'axe Oz contribue au champ au point M :

$$\mathrm{d}E_z = \mathrm{d}\vec{E}.\vec{u}_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\sigma r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r}{r^2+z^2}\vec{u}_{PM}.\vec{u}_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\sigma r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r}{r^2+z^2}\cos\alpha$$

Or : $\cos\alpha = \dfrac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}$

La composante du champ en M s'écrit :

$$E_z = \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_o}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}$$

On peut remarquer que : $\dfrac{d\left(r^2+z^2\right)^{-1/2}}{dr} = -\dfrac{r}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}$

Après intégration sur l'angle polaire et en se servant de la remarque, on écrire la résultante sous la forme :

$$E_z(M) = -\frac{z\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R d\left(r^2+z^2\right)^{-1/2}$$

$$E_z(M) = -\frac{z\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\left(R^2+z^2\right)^{-1/2} - z\right)$$

$$\boxed{E_z(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}\right) \text{ avec } z > 0}$$