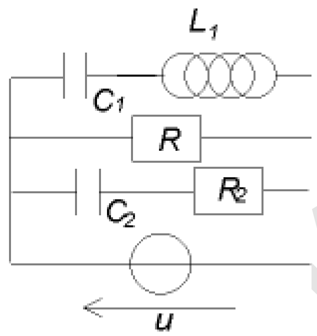
E7.1. Puissance moyenne dissipée par un dipôle.

Enoncé.

On considère le circuit suivant alimenté par un générateur délivrant une tension alternative sinusoïdale de pulsation ω, de valeur efficace U = 12 V et de fréquence f = 120 kHz.
La valeur des différents composants est :
C_1 = 1,0 μF ; L_1 = 40 μH ; R_2 = 0,10 Ω ; C_2 = 4,0μF ; R = 4,0 Ω.



1. Déterminer l'admittance complexe $\tilde{Y}$ du montage vue entre les bornes du générateur.
2. Calculer les intensités dans les différentes branches.
3. Quelle est la puissance moyenne échangée par le générateur.

E7.1. Puissance moyenne dissipée dans un dipôle.
Corrigé.

1. Admittance complexe.

Dans un circuit en dérivation, l'admittance équivalente est la somme des admittances présentes dans chaque branche du réseau.

Pour une association série, l'admittance équivalente est égale à l'inverse de la somme des impédances en série.

On obtient ainsi :

$$\tilde{Y} = \frac{1}{\frac{1}{jC_1\omega} + jL_1\omega} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{jC_2\omega}}$$

$$\tilde{Y} = \frac{jC_1\omega}{1 - L_1C_1\omega^2} + \frac{1}{R} + \frac{jC_2\omega}{1 + jR_2C_2\omega} = \frac{jC_1\omega}{1 - L_1C_1\omega^2} + \frac{1}{R} + \frac{jC_2\omega\left(1 - jR_2C_2\omega\right)}{1 + \left(R_2C_2\omega\right)^2}$$

$$\tilde{Y} = \frac{jC_1\omega}{1 - L_1C_1\omega^2} + \frac{1}{R} + \frac{R_2C_2^2\omega^2 + jC_2\omega}{1 + \left(R_2C_2\omega\right)^2}$$

$$\tilde{Y} = -0{,}035\,j + 0{,}25 + \frac{0{,}1 + j/3}{0{,}12}$$

$$\tilde{Y} = 1{,}08 + 2{,}74\,j$$

$$\left|\tilde{Y}\right| = Y = 2{,}95 \text{ S}$$

2. Intensités.

Les différentes branches du circuit étant en dérivation, une même tension *u* est présente aux bornes de ces branches. Pour déterminer les différentes intensités on utilise la définition de l'admittance complexe :

$$\tilde{I}_{eff} = \tilde{Y}\tilde{U}_{eff}$$

$$\tilde{I}_{1\,eff} = \frac{jC_1\omega}{1 - L_1C_1\omega^2}U_{eff} \qquad I_{1\,eff} = \frac{C_1\omega}{\left|1 - L_1C_1\omega^2\right|}U_{eff} \qquad I_{1\,eff} = 0{,}42 \text{ A}$$

$$\tilde{I}_{2\,eff} = \frac{jC_2\omega}{1 + jR_2C_2\omega}U_{eff} \qquad I_{2\,eff} = \frac{C_2\omega}{\sqrt{1 + \left(R_2C_2\omega\right)^2}}U_{eff} \qquad I_{2\,eff} = 34{,}8 \text{ A}$$

$$\tilde{I}_{3\,eff} = \frac{U_{eff}}{R} \qquad I_{3\,eff} = \frac{U_{eff}}{R} \qquad I_{3\,eff} = 3{,}0 \text{ A}$$

3. Puissance moyenne.

La définition de la puissance moyenne échangée par un dipôle avec le reste du circuit est :

$$P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos\varphi = U_{eff} I_{eff} \cos\varphi \text{ or } I_{eff} = Y U_{eff}$$

$$P = Y U_{eff}^2 \cos\varphi$$

Comme : $\tilde{I}_{eff} = \tilde{Y} \tilde{U}_{eff} \Rightarrow \tilde{Y} = \dfrac{\tilde{I}_{eff}}{\tilde{U}_{eff}} = G + jB$ avec G conductance

On obtient ainsi l'expression du $\cos\varphi$: $\cos\varphi = \dfrac{G}{Y}$ d'où :

$$P = GU^2$$

$$P = 1,08 \times 12^2 = 156 \text{ W}$$

Le seul élément dissipatif d'énergie dans un circuit étant le conducteur ohmique (car $\varphi = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi = 0$ pour les condensateurs et les bobines), la puissance moyenne échangée par le générateur avec le reste du circuit s'écrit :

$$P = R I_{3\,eff}^2 + R_2 I_{2\,eff}^2$$