(03) 1. Fonctions de transfert des trois circuits.

Pour les trois circuits, on applique le théorème de Millman à l'entrée ⊖ de l'A.O. Comme les AO sont supposés idéaux on a $\varepsilon = 0$ soit $V_\ominus = V_\oplus = 0$.

D'où :

1 Circuit 1 $\quad \frac{1}{R}\underset{\sim}{e_1} + \frac{1}{\frac{R}{1+jRC\omega}}\underset{\sim}{s_1} = 0 \qquad \underset{\sim}{H_1}(j\omega) = -\frac{1}{1+jRC\omega}$

1 Circuit 2 $\quad \frac{1}{R_1}\underset{\sim}{e_2} + \frac{1}{R_1}\underset{\sim}{s_2} = 0 \qquad \underset{\sim}{H_2}(j\omega) = -1$

1 Circuit 3 $\quad \frac{1}{R_2}\underset{\sim}{e_3} + jC\omega\underset{\sim}{s_3} = 0 \qquad H_3(j\omega) = -\frac{1}{jR_2C\omega}$

2. Fonction de transfert.

On applique le théorème de Millman en N avec $V_N = 0$ car les AO sont parfaits :

$$\frac{\underset{\sim}{e}}{R} + \frac{\underset{\sim}{s_3}}{R_3} + \left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)\underset{\sim}{s} = 0 \qquad (1)$$

Or d'après la question 1 :

$$\underset{\sim}{s_3} = -\frac{1}{jR_2C\omega}\underset{\sim}{e_3}$$ et $\underset{\sim}{e_3}$ apparaît comme étant égale à $\underset{\sim}{s_2}$

Or $\underset{\sim}{s_2} = -\underset{\sim}{e_2}$ et $\underset{\sim}{e_2} = \underset{\sim}{s}$ d'où :

$$\underset{\sim}{s_3} = +\frac{1}{jR_2C\omega}\underset{\sim}{s}$$

L'équation (1) s'écrit :

$$\frac{\underset{\sim}{e}}{R} + \frac{\underset{\sim}{s}}{jR_2R_3C\omega} + \frac{1+jRC\omega}{R}\underset{\sim}{s} = 0$$

$$\underset{\sim}{s}\left(\frac{1+jRC\omega}{R} + \frac{1}{jR_2R_3C\omega}\right) = -\frac{\underset{\sim}{e}}{R}$$

Filtre passe-bande - Décomposition en séries de Fourier - (2/5)

$$\underset{\sim}{H}(j\omega) = \frac{-1}{1 + j\left(RC\omega - \frac{R}{R_2R_3C\omega}\right)}$$

Par identification

$$\frac{Q}{\omega_0} = RC \qquad Q\omega_0 = \frac{R}{R_2R_3C} \qquad H_0 = +1$$

$$RC\omega_0 = \frac{R}{R_2R_3C}\frac{1}{\omega_0} \longrightarrow \omega_0 = \frac{1}{(R_2R_3)^{1/2}C}$$

$$Q = RC\omega_0 \qquad Q = \frac{R}{(R_2R_3)^{1/2}}$$

$$\boxed{H_0 = 1\ ; \quad Q = \frac{R}{(R_2R_3)^{1/2}}\ ; \quad \omega_0 = \frac{1}{(R_2R_3)^{1/2}C}}$$

3. Bande passante à 3 dB.

La bande passante est l'ensemble des fréquences pour lesquelles on a :

$$H(\omega) \geq \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{\left(1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right)^{1/2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

les pulsations limites vérifient :

$$1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 2 \qquad Q\left(x - \frac{1}{x}\right) = \pm 1$$

$$Qx^2 \mp x - Q = 0 \qquad x^2 \pm \frac{1}{Q}x - 1 = 0$$

$$x_2 = +\frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Q^2} + 4\right)^{1/2}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Q^2} + 4\right)^{1/2}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{1}{Q} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$$

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC}}$$

4. Allure de la courbe.

Soit $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ $\Rightarrow$ $G_{dB} = 20\log \frac{H_0}{\left(1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right)^{1/2}}$ comme $H_0 = 1$ on a :

$$G_{dB} = -10\log\left(1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right)$$

Pour $x = 1$ $(\omega = \omega_0)$ $G_{dB} = 0$ $\qquad G_{dB} = 20X - 20\log Q$

Pour $x \to 0$ asymptote $G_{dB} = +20\log\frac{x}{Q}$ pente de 20dB/décade

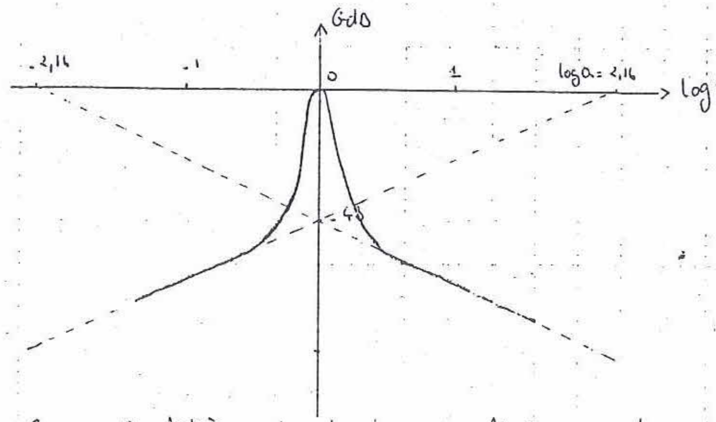
Pour $x \to \infty$ asymptote $G_{dB} = -20\log xQ$ pente de -20dB/décade.

Les asymptotes se coupent en $x = 1$, $G_{dB}(x=1) = -20\log Q$.

Application numérique : $Q = \frac{6{,}8.10^3}{\sqrt{47\times 47}} = 145$.

$\log Q = 2{,}16 \qquad -20\log Q = -43\,dB$.

Filtre passe-bande - Décomposition en série de Fourier. (4/5)



Comme Q est très grand, la résonance est aiguë $\Rightarrow$ le graphe se trouve très rapidement confondu avec les asymptotes

5. Coefficients.

- $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T e(t)\,dt$ $\qquad$ a_0 correspond à la valeur moyenne du signal d'entrée sur une période.

  $a_0 = 0$

- La fonction $e(t)$ est impaire ; les coefficients b_n sont donc nuls.
- Coefficients a_n :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T e(t)\sin n\omega t = \frac{2E}{T}\left[\int_0^{T/2}\sin n\omega t\,dt \int_{T/2}^T \sin n\omega t\,dt\right]$$

$$a_n = \frac{2E}{T}\left[\left[-\frac{1}{n\omega}\cos n\omega t\right]_0^{T/2} + \left[\frac{1}{n\omega}\cos n\omega t\right]_{T/2}^T\right]$$

$$a_n = \frac{2E}{nT\omega}\left(\left[-\cos n\frac{2\pi}{T}t\right]_0^{T/2} + \left[\cos n\frac{2\pi}{T}t\right]_{T/2}^T\right)$$

$$a_n = \frac{2E}{nT\omega}\left(-\cos n\pi + 1 + 1 - \cos n\pi\right) = \frac{4E}{nT\omega}\left(1-\cos n\pi\right)$$

$\cos n\pi = -1$ pour n impair
$\cos n\pi = +1$ pour n pair $\qquad \Rightarrow \cos n\pi = (-1)^n$

$$\boxed{a_n = \frac{2E}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)}$$

Filtre passe-bande. Décomposition en série de Fourier. (5/5).

1 $a_1 = \dfrac{4E}{\pi} = 12,7V$ $\quad a_3 = \dfrac{4}{3}\dfrac{E}{\pi} = 4,2V$ $\quad a_5 = \dfrac{4E}{5\pi} = 2,55V$.

6. Caractéristique du signal de sortie.

Le filtre étant très sélectif, il ne laisse passer que les harmoniques de pulsation $n\omega$ très voisine de ω_0. Soit

$\omega n = \omega_0$ $\quad 2\pi f\, n = \dfrac{1}{C}\dfrac{1}{\sqrt{R_2 R_3}}$

$n = \dfrac{1}{C}\dfrac{1}{\sqrt{R_2R_3}}\dfrac{1}{2\pi f}$ $\quad n = \dfrac{1}{680.10^{-9}}\dfrac{1}{\sqrt{47\times47}} \times \dfrac{1}{2\times3,14\times1650} \simeq 3.$

$\Rightarrow \omega_3 = 3\omega = 3,11.10^4 rad\,s^{-1}$!

On obtient en sortie, l'harmonique 3 qui est un signal sinusoïdal d'amplitude a_3' :

$$a_3' = \frac{a_3}{\left(1+Q^2\left(\frac{\omega_3}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega_3}\right)^2\right)^{1/2}} \simeq 3,0V.$$

$(\omega_0 \simeq 3,13.10^4 rad\,s^{-1})$.