E6.3. Filtre passe-bande de Rauch.

1. Fonction de transfert.

On applique le théorème de Millman aux points A et B afin d'établir une relation entre v_e et v_s.

On pose $V_M = 0$ et l'on suppose que l'amplificateur opérationnel est idéal et qu'il fonctionne en régime linéaire. On a alors :

$$V_E = v_e \ , \ V_S = v_s$$

$$V_B = 0 \text{ car } \varepsilon = 0$$

Au point A :

$$\widetilde{V}_A\left(\frac{2}{R} + 2jC\omega\right) = \frac{\widetilde{V}_E}{R} + jC\omega\widetilde{V}_S$$

$$2\widetilde{V}_A(1 + jx) = \widetilde{V}_E + jx\widetilde{V}_S \quad (1)$$

Au point B :

$$0 = jC\omega\widetilde{V}_A + \frac{\widetilde{V}_S}{R}$$

$$\widetilde{V}_A = -\frac{\widetilde{V}_S}{jx} \quad (2)$$

En reportant (2) dans (1) on obtient :

$$-2\frac{\widetilde{V}_S}{jx}(1 + jx) = \widetilde{V}_E + jx\widetilde{V}_S$$

$$-\widetilde{V}_S\left(2\frac{1 + jx}{jx} + jx\right) = \widetilde{V}_E$$

D'où :

$$\widetilde{H}(jx) = \frac{\widetilde{V_S}}{\widetilde{V_E}} = -\frac{1}{2\frac{1 + jx}{jx} + jx} = -\frac{1}{2 + jx + \frac{2}{jx}}$$

$$\widetilde{H}(jx) = -\frac{1}{2 + j\left(x - \frac{2}{x}\right)}$$

$$\widetilde{H}(jx) = \frac{1}{-2 + j\left(\frac{2}{x} - x\right)}$$

2. Diagramme de Bode.

On exprime le gain en décibels :

$$G_{dB} = 20\log\left|\widetilde{H}(jx)\right| = -10\log\left(4 + \left(\frac{2}{x} - x\right)^2\right)$$

Le comportement asymptotique du dispositif est pour :

$$x \to 0 \quad G_{dB\ \mathrm{BF}} = -10\log\frac{4}{x^2} = -20\log 2 + 20\log x = -6 + 20\log x$$

$$x \to \infty \quad G_{dB\ \mathrm{HF}} = -10\log x^2 = -20\log x$$

L'intersection de ces deux asymptotes se fait au point I d'abscisse x_I tel que :

$$-6 + 20\log x_I = -20\log x_I$$

$$40\log x_I = 6 = 20\log 2$$

$$\log x_I^{\,2} = \log 2$$

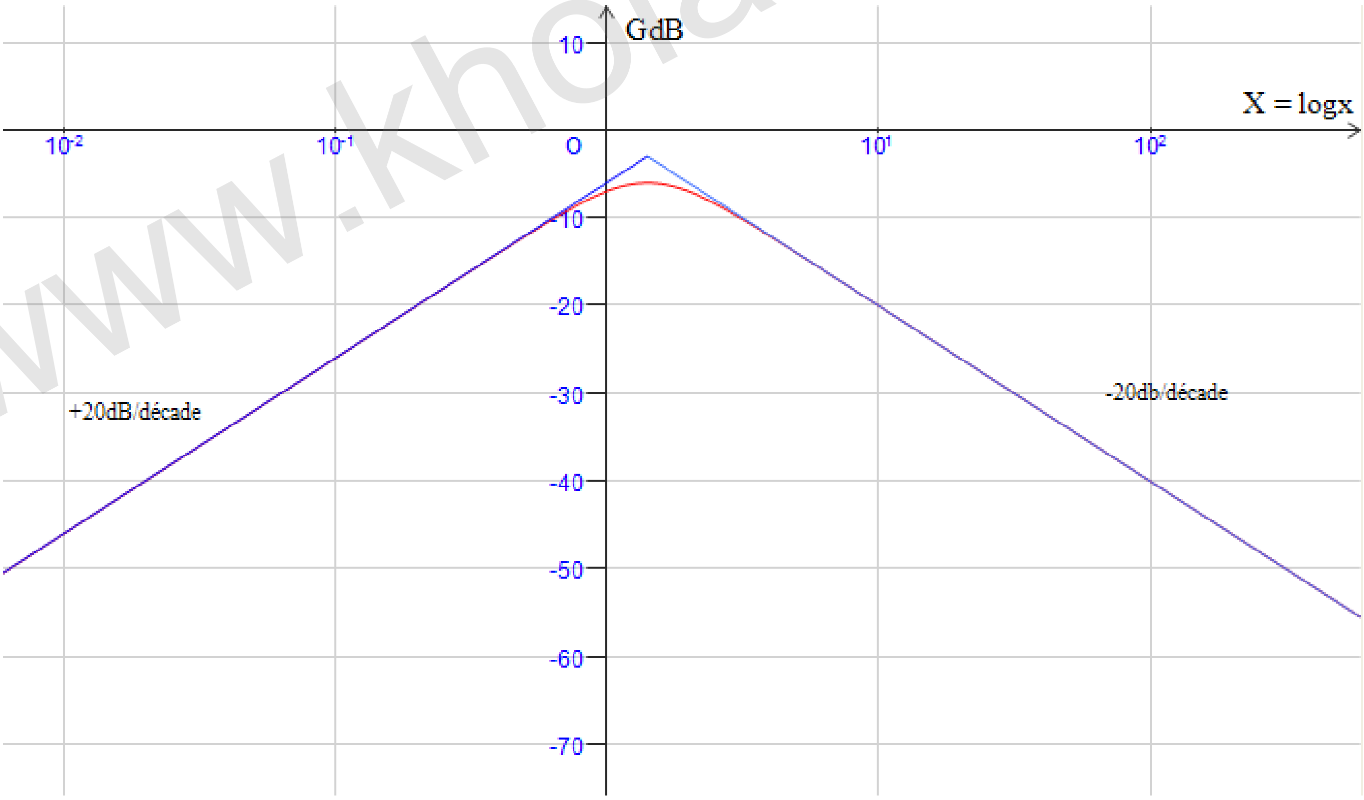
$$x_I = \sqrt{2}$$

On peut remarquer que le gain est maximal en x_I :

$$G_{dB}\left(x_I\right) = -10\log 4 = -6\mathrm{dB}$$

Le gain asymptotique en ce point a pour valeur :

$$G_{dB\ \mathrm{asymptotique}}\left(x_I\right) = -20\log x_I = -20\log\sqrt{2} = -10\log 2 = -3\ \mathrm{dB}$$



Le déphasage de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée est donné par l'argument de la fonction de transfert :

$$\varphi = \arg\widetilde{H}(j\omega) = -\arg\left(-2 + j\left(\frac{2}{x} - x\right)\right)$$

$$\varphi = -\left(\pi + \arctan\left(-\left(\frac{2}{x} - x\right)\frac{1}{2}\right)\right)$$

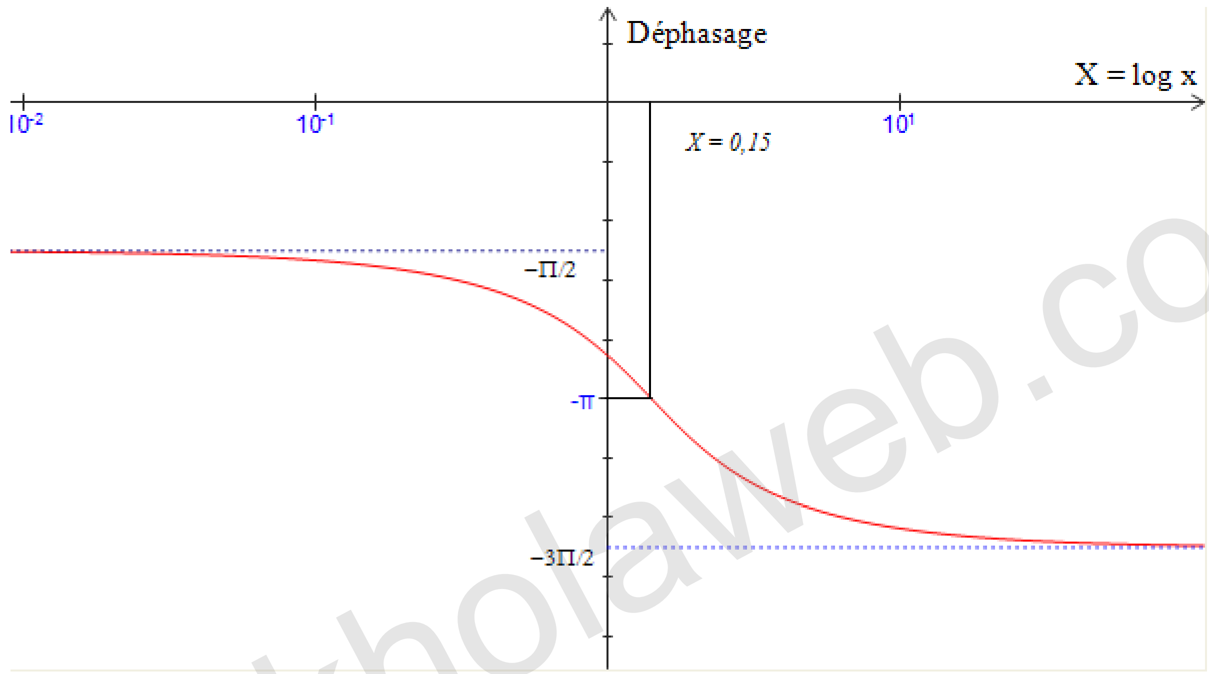
$$\varphi = -\pi - \arctan\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{x}\right)$$

Le comportement asymptotique de la phase est pour :

$$x \to 0 \quad \varphi \to -\pi/2$$

$$x \to \infty \quad \varphi \to -3\pi/2$$

Pour $x = x_1 = \sqrt{2}$ on a $\varphi = -\pi$



3. Bande passante.

Les limites de la bande passante à – 3dB sont données par :

$$\left|\widetilde{H}(jx)\right| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Ici $H_{\max} = \frac{1}{2}$, on a alors :

$$\frac{1}{\left(4+\left(\frac{2}{x}-x\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad 4+\left(\frac{2}{x}-x\right)^2 = 8$$

$$\left(\frac{2}{x}-x\right)^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{x}-x = \pm 2$$

$$x^2 \pm 2x - 2 = 0$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 12$; $\sqrt{\Delta} = 3,46$.

On ne retient que les racines positives :

$$x_1 = \frac{-2+\sqrt{12}}{2} = 0,73$$

$$x_2 = \frac{2+\sqrt{12}}{2} = 2,73$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 2 = RC\Delta\omega$$

$$\Delta\omega = \frac{2}{RC}$$