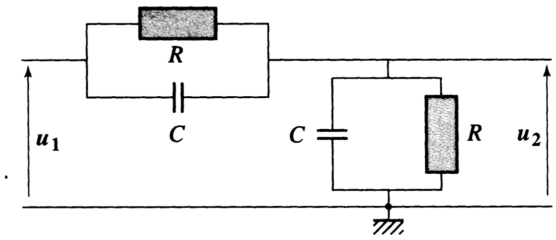
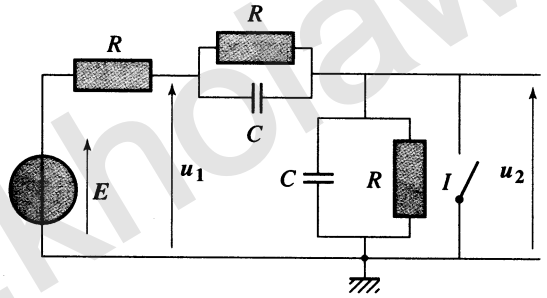
E5.9. Double (*R*,*C*) série.

Enoncé.

On considère le montage suivant :



1. Déterminer la fonction de transfert du montage.
2. En utilisant l'expression de la fonction de transfert établir la relation entre les tensions u_1 et u_2.
3. Etablir directement l'équation différentielle liant les tensions u_1 et u_2. Conclusion.
4. On considère maintenant le montage suivant :



Pour $t < 0$: interrupteur *I* fermé.
Pour $t > 0$: interrupteur *I* ouvert.
Montrer que la relation entre u_1 et u_2 établie dans la question 2, n'est pas vérifiée.

E5.9. Double (*R*,*C*) série.
Corrigé.

1. Fonction de transfert du montage.
On utilise la notion de pont diviseur de tension pour déterminer la fonction de transfert du montage :

$$\widetilde{H}=\frac{\widetilde{U}_{2m}}{\widetilde{U}_{1m}}=\frac{\widetilde{N}(j\omega)}{\widetilde{D}(j\omega)}=\frac{\widetilde{Z}(j\omega)}{2\widetilde{Z}(j\omega)}=\frac{1}{2}$$

Il est à noter que les polynômes complexes $\widetilde{N}(j\omega)$ et $\widetilde{D}(j\omega)$ ne sont pas premiers entre eux.

2. Relation entre les tensions.
Compte tenu de l'expression de la fonction de transfert on serait amené à écrire, qu'en toutes circonstances, la réponse $u_2(t)$ à l'excitation $u_1(t)$ vérifierait la relation :

$$u_2(t)=\frac{1}{2}u_1(t)$$

L'objet de cet exercice est de montrer que tel n'est pas le cas, car les polynômes complexes $\widetilde{N}(j\omega)$ et $\widetilde{D}(j\omega)$ de la fonction de transfert ne sont pas premiers entre eux, ce qui fait « perdre » un ou plusieurs ordres à l'équation différentielle du circuit associée à la fonction de transfert.
Autrement dit, on ne peut passer de la fonction transfert à l'équation différentielle en régime linéaire que si les polynômes complexes $\widetilde{N}(j\omega)$ et $\widetilde{D}(j\omega)$ de la fonction de transfert sont premiers entre eux

3. Equation différentielle du circuit.
L'équation vérifiée par l'intensité du courant dans le circuit est :

$$i=\frac{u_1-u_2}{R}+C\frac{d(u_1-u_2)}{dt}=\frac{u_2}{R}+C\frac{du_2}{dt}$$

$$\frac{u_1}{R}+C\frac{du_1}{dt}=2\left(\frac{u_2}{R}+C\frac{du_2}{dt}\right)$$

$$\boxed{\frac{du_2}{dt}+\frac{u_2}{RC}=\frac{1}{2}\left(\frac{du_1}{dt}+\frac{u_1}{RC}\right)}$$

On obtient ainsi une équation différentielle d'ordre 1 que l'on aurait obtenue si la simplification par $\widetilde{Z}(j\omega)$ n'avait pas été effectuée dans l'expression de la fonction de transfert.

4. Nouvelle relation entre les tensions.
Pour *t* < 0 la tension u_2 du fait de la présence d'un interrupteur en position fermée aux bornes de la dérivation. On peut aussi supposer de l'existence d'un régime permanent : le condensateur de gauche a eu le temps de se charger et le courant *i* circule dans les deux premiers résistors de gauche et dans l'interrupteur fermé. On a donc :

$$u_1=Ri=R\frac{E}{2R}=\frac{E}{2}$$

En résumé :

Pour $t<0$: $u_1=\dfrac{E}{2}$; $u_2=0$

Pour *t* > 0, L'équation vérifiée par l'intensité du courant dans le circuit est :

$$i=\frac{E-u_1}{R}=\frac{u_1-u_2}{R}+C\frac{d(u_1-u_2)}{dt}=C\frac{du_2}{dt}+\frac{u_2}{R}$$

$$2\frac{E-u_1}{R}=\frac{u_1}{R}+C\frac{du_1}{dt} \quad \Rightarrow \quad 2\frac{E}{R}=3\frac{u_1}{R}+C\frac{du_1}{dt}$$

$$2E=3u_1+RC\frac{du_1}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{du_1}{dt}+3\frac{u_1}{RC}=2\frac{E}{RC}$$

La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$u_1=\frac{2}{3}E+A\exp\left(-\frac{3t}{RC}\right)$$

Comme il y a continuité de la tension aux bornes d'un condensateur on peut alors écrire :

$$u_1\left(t=0^+\right)=u_1\left(t=0^-\right) \text{ soit : } \frac{2}{3}E+A=\frac{E}{2}\Rightarrow A=-\frac{1}{6}E$$

On obtient ainsi :

$$\boxed{u_1=E\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\exp\left(-\frac{3t}{RC}\right)\right)}$$

Comme : $\frac{du_2}{dt}+\frac{u_2}{RC}=\frac{1}{2}\left(\frac{du_1}{dt}+\frac{u_1}{RC}\right)$ d'après la question 3, on obtient alors :

$$\frac{du_2}{dt}+\frac{u_2}{RC}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{E}{RC}\exp\left(-\frac{3t}{RC}\right)+\frac{E}{RC}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\exp\left(-\frac{3t}{RC}\right)\right)\right)$$

$$\frac{du_2}{dt}+\frac{u_2}{RC}=\frac{E}{RC}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\exp\left(-\frac{3t}{RC}\right)\right)$$

La solution de cette nouvelle équation différentielle est la somme de la solution de l'équation différentielle sans second membre de la forme $B\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$ et d'une solution particulière de la forme $\frac{E}{3}+D\exp\left(-\frac{3t}{RC}\right)$:

$$u_2=B\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)+\frac{E}{3}+D\exp\left(-\frac{3t}{RC}\right)$$

On reporte cette expression dans l'équation différentielle :

$$-\frac{B}{RC}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)-\frac{3D}{RC}\exp\left(-\frac{3t}{RC}\right)+\frac{B}{RC}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)+\frac{E}{3RC}+\frac{D}{RC}\exp\left(-\frac{3t}{RC}\right)=\frac{E}{3RC}+\frac{E}{6RC}\exp\left(-\frac{3t}{RC}\right)$$

On obtient l'expression de D :

$$D=-\frac{E}{12}$$

La continuité de la tension u_2 permet d'écrire que :

$$u_2\left(t=0^+\right)=u_2\left(t=0^-\right) \text{ soit : } B+\frac{E}{3}-\frac{E}{12}=0 \Rightarrow B=-\frac{E}{4}$$

On obtient finalement :

$$\boxed{u_2=E\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)-\frac{1}{12}\exp\left(-\frac{3t}{RC}\right)\right)}$$

On constate que :

$$u_2=E\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)-\frac{1}{12}\exp\left(-\frac{3t}{RC}\right)\right)\neq\frac{u_1}{2}=E\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\exp\left(-\frac{3t}{RC}\right)\right)$$

On peut remarquer que lorsque le régime permanent est atteint on retrouve l'égalité de la question 2 :

$$u_2\left(t\to\infty\right)=\frac{E}{3}=\frac{1}{2}u_1\left(t\to\infty\right)$$