E5.8. Etude d’un filtre avec AO.

On suppose l’amplificateur opérationnel idéal et on utilise le théorème de Millman aux entrées inverseuse et non inverseuse :

$$\tilde{V}_-\left(\frac{2}{R}+jC\omega\right)=\tilde{V}_S\left(\frac{1}{R}+jC\omega\right) \qquad \Rightarrow \tilde{V}_-=\frac{1+jRC\omega}{2+jRC\omega}\tilde{V}_S$$

$$\tilde{V}_+\left(\frac{2}{R_e}\right)=\frac{\tilde{V}_e}{R_e} \qquad \Rightarrow \tilde{V}_+=\frac{\tilde{V}_e}{2}$$

On suppose l’amplificateur opérationnel en régime linéaire, on a alors :

$$\tilde{V}_-=\tilde{V}_+ \qquad \Rightarrow \frac{1+jRC\omega}{2+jRC\omega}\tilde{V}_S=\frac{\tilde{V}_e}{2}$$

$$\tilde{H}(j\omega)=\frac{\tilde{V}_S}{\tilde{V}_e}=\frac{1}{2}\frac{2+jRC\omega}{1+jRC\omega}$$

On pose : $x=RC\omega$

$$\tilde{H}(j\omega)=\frac{1}{2}\frac{2+jx}{1+jx}$$

Etude de la réponse en gain.

Le gain en dB a pour expression :

$$G_{dB}=20\log\left|\tilde{H}(jx)\right|=20\log\frac{1}{2}\left(\frac{4+x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0}G_{dB}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}G_{dB}=20\log\frac{1}{2}=-6,0\text{ dB}$$

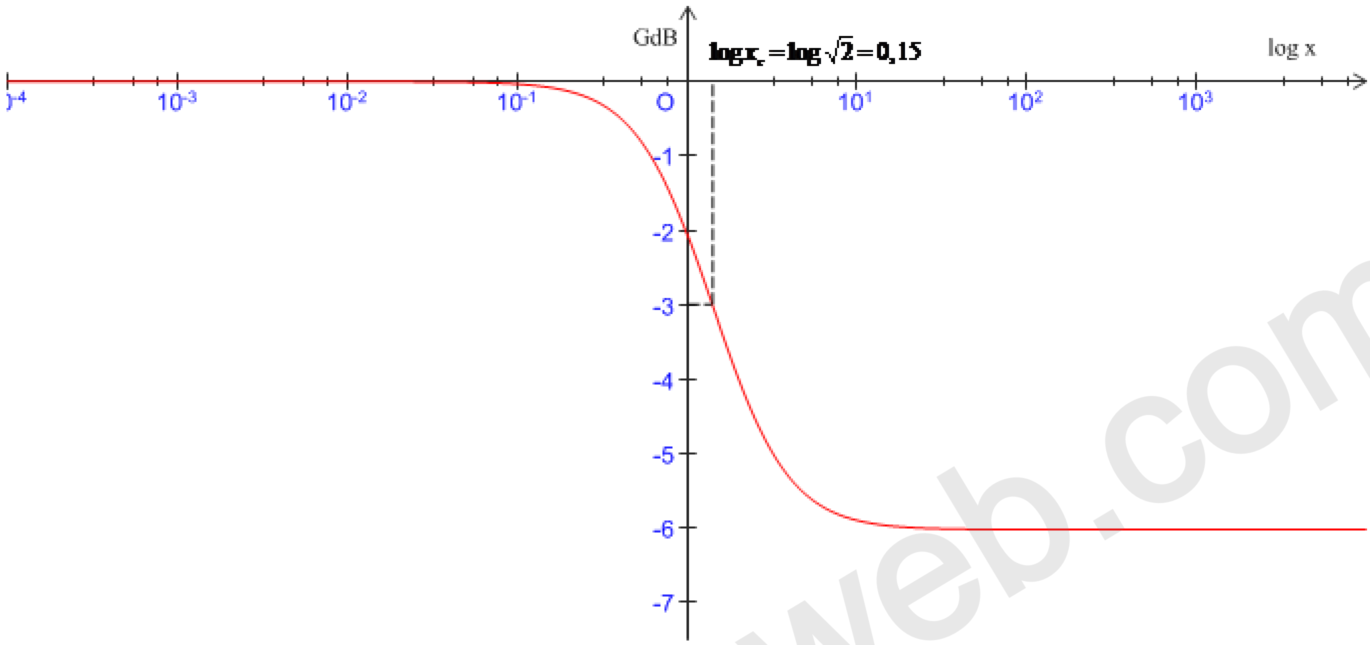
La pulsation réduite de coupure x_c est définie par :

$$H(x_c)=\frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} \text{ soit dans le cadre de cet exercice : } H(x_c)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4+x_c^{\,2}}{1+x_c^{\,2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \frac{1}{4}\left(\frac{4+x_c^{\,2}}{1+x_c^{\,2}}\right)=\frac{1}{2}$$

$$4+x_c^{\,2}=2+2x_c^{\,2}$$

$$x_c=\sqrt{2}$$



Etude de la réponse en phase.

Le déphasage entre la tension de sortie et la tension d'entrée est défini par :

$$\varphi = \arg \widetilde{H}(jx) = \arg\left(\frac{1}{2}\frac{2+jx}{1+jx}\right) = \arg\left(\frac{1}{2}\right) + \arg(2+jx) - \arg(1+jx)$$

$$\varphi = \arctan\frac{x}{2} - \arctan x$$

Le comportement asymptotique de la phase est :

$$\lim_{x\to 0}\varphi = 0^-$$

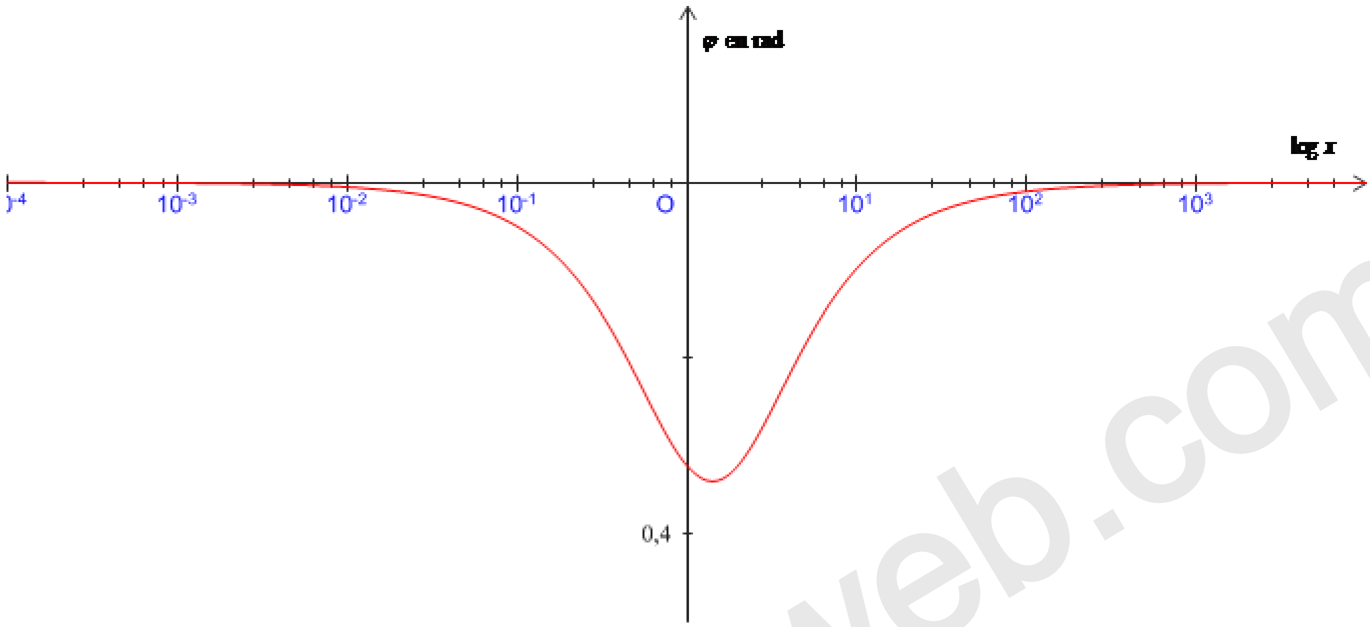
$$\lim_{x\to\infty}\varphi = 0^-$$

On recherche les extremums de la phase :

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}\frac{1}{2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{4+x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \text{ pour } \; 2\left(1+x^2\right) = 4+x^2 \;\Rightarrow\; x = x_c = \sqrt{2}$$

$$\varphi\left(x=\sqrt{2}\right) = -0{,}34 \text{ rad}$$


φ en rad
log x
10-3
10-2
10-1
O
10¹
10²
10³
0,4