E5.6. Filtre passe-haut du second ordre.

1. Fonction de transfert.
En utilisant la notion de pont diviseur de tension, on obtient :

$$\tilde{H} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{LC\omega^2} - j\frac{R}{L\omega}}$$

Or :

$$\frac{1}{LC\omega^2} = \frac{\omega_o^2}{\omega^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{R}{L\omega} = \frac{RC}{LC\omega} = \frac{RC\omega_o^2}{\omega} = \frac{\omega_o}{Q\omega} = \frac{1}{Qx}$$

La fonction de transfert s'écrit alors :

$$\boxed{\tilde{H} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2} - j\frac{1}{Qx}}}$$

2. Courbe de réponse en gain.
Le gain exprimé en décibels a pour expression :

$$GdB = 20\log\left|\tilde{H}\right| = 20\log\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{1}{x^2Q^2}}}$$

$$GdB = -10\log\left((1 - \frac{1}{x^2})^2 + \frac{1}{Q^2x^2}\right)$$

La courbe de réponse en gain admet :

- en basse fréquence :
  une asymptote passant par l'origine de pente + 40 dB/ décade
  $G_{BF} = 40 \log x = 40 X$

- en haute fréquence :
  une asymptote horizontale à $G_{HF} = 0$ dB

Le diagramme asymptotique est la réunion des deux asymptotes haute et basse fréquence limitées à leur point de concours.
La qualité de cette représentation s'évalue en calculant en $x = 1$ l'écart entre la représentation asymptotique et la réponse en gain :

$$\Delta GdB = GdB(I) - GdB(x = 1) = -20\log Q$$

Cet écart peut prendre une valeur élevée si l'amortissement du circuit est faible, c'est à dire si le facteur de qualité Q du circuit est grand.
Il faut donc préciser les variations de la courbe de réponse en gain suivant la valeur du facteur de qualité.
Soit :

$$f(x) = (1-\frac{1}{x^2})^2 + \frac{1}{Q^2x^2}$$

Cette fonction passe par un extremum s lorsque sa dérivée s'annule :

$$\frac{df}{dx} = 2(1-\frac{1}{x^2})\frac{2}{x^3} - \frac{2}{Q^2x^3} = 0$$

On obtient :

$$2(1-\frac{1}{x_S^2}) = \frac{1}{Q^2} \qquad \Rightarrow \qquad x_S = \frac{Q\sqrt{2}}{\sqrt{2Q^2-1}}$$

pour $Q > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

L'extremum est en fait un maximum de coordonnées pour $Q > \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$X_S = \log\frac{Q\sqrt{2}}{\sqrt{2Q^2-1}} > 0$$

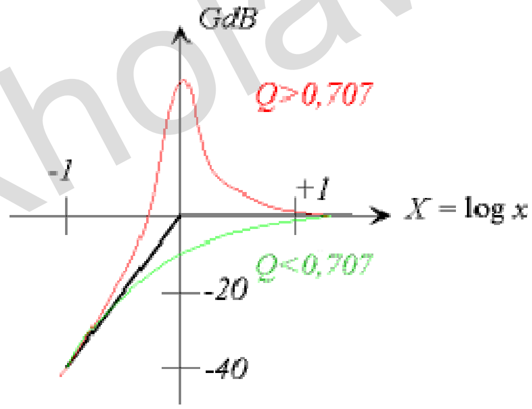
$$GdB_S = -10\log\left(\frac{1}{4Q^4} + \frac{1}{Q^2}\frac{2Q^2-1}{2Q^2}\right) = -10\log\left(\frac{4Q^2-1}{4Q^4}\right) > 0$$

Dans le cas où $Q >> 1$, on obtient pour le maximum :

$$Xs = 0$$

$$GdBs = 20\log Q$$

On obtient finalement comme courbe de réponse en gain :



3. Courbe de réponse en phase.

<u>L'argument du dénominateur</u> de la fonction de transfert est donnée par :

- pour $x = 1$
  $$\Phi = -\frac{\pi}{2}$$
- Pour $x > 1$
  $$\Phi = \arctan -\frac{1}{xQ(1-\frac{1}{x^2})} = \arctan\frac{1}{xQ(\frac{1}{x^2}-1)}$$
- Pour $x < 1$
  $$\Phi = \pi + \arctan -\frac{1}{xQ(1-\frac{1}{x^2})} = \pi + \arctan\frac{1}{xQ(\frac{1}{x^2}-1)}$$

Le déphasage de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée est donné par :

$$\varphi = -\Phi$$

La courbe de réponse en phase passe le point ($X = 0, \pi/2$) et admet :

- en basse fréquence :
  une asymptote horizontale $\varphi = \pi$ compte tenu de la valeur en $X = 0$ et en remarquant que la courbe est continue en ce point.
- en haute fréquence :
  une asymptote horizontale $\varphi = 0$.